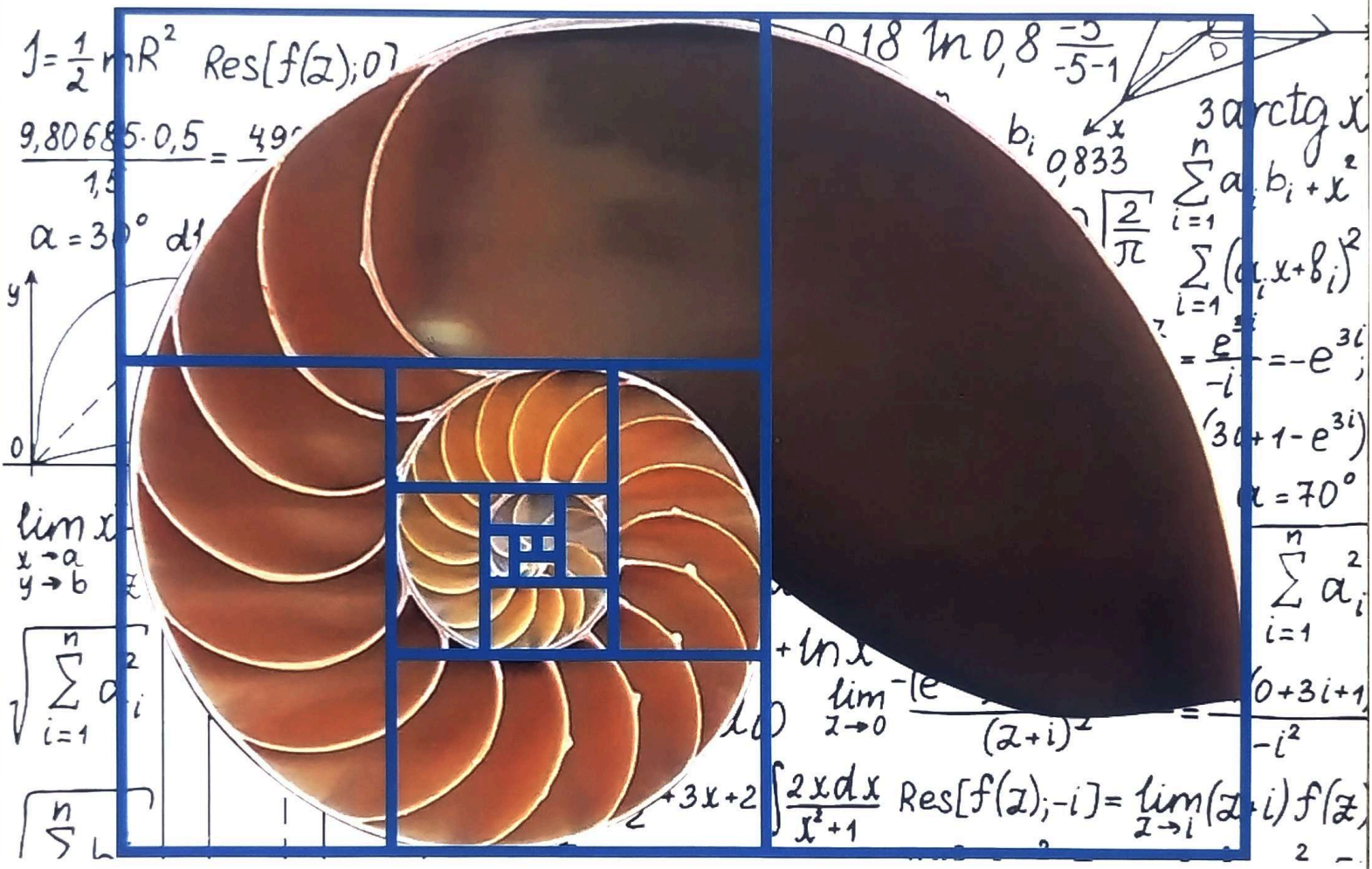
Carlo Càssola



U Math 2

Geometria piana per le gare di matematica

Teoremi, tecniche e problemi

scienza express

Introduzione

La geometria è una delle parti della matematica che gli studenti trovano più ostica, principalmente a causa della difficoltà nel visualizzare le figure. L'ambito olimpico non fa eccezione: anche i ragazzi più abili nei problemi olimpici, preferiscono solitamente altri argomenti.

In queste poche pagine non si pretende certamente di modificare questa situazione: non è facile intervenire sui gusti personali degli allievi (che spesso rispecchiano anche le preferenze di alcuni docenti, che la geometria non amano insegnarla). L'obiettivo è fornire una raccolta di teoremi, tecniche ed esercizi per aiutare lo studente che desideri approfondire la sua preparazione in geometria, nella speranza di insegnargli anche ad apprezzarne la profonda eleganza.

Questo libro non è un manuale scolastico: pertanto non contiene, tranne alcune eccezioni, le dimostrazioni dei teoremi che saranno di volta in volta enunciati e utilizzati. Per queste si rimanda a qualsiasi trattato di geometria di base. Lo studente che cerca di consolidare la propria preparazione scolastica si rivolga quindi ad altro tipo di fonti. Il testo è incentrato su problemi delle gare di matematica, ed è dedicato, oltre che ai giovani che vogliano cimentarsi nelle competizioni, a tutti coloro che siano disposti a mettersi alla prova con esercizi e dimostrazioni. L'autore si augura che possa essere utile, inoltre, a chi si prepara per le prove di ammissione alle scuole superiori universitarie.

Per quanto riguarda la completezza e l'ordine degli argomenti trattati, questo lavoro non ha alcuna pretesa di sistematicità: i temi sono stati selezionati perché

utili alla risoluzione di problemi olimpici; e l'ordine di esposizione è stato scelto in quanto funzionale, secondo la personale opinione dell'autore, all'introduzione di esercizi via via più interessanti.
Il lettore incontrerà qui tre tipi di problemi: a risposta multipla (tipici delle gare di livello base, come i giochi di Archimede), a risposta numerica (gare a squadre e livello medio delle gare individuali), e dimostrativi (gare individuali dal livello medio in su, fino al livello nazionale e internazionale). Gli esercizi proposti riportano un'indicazione della difficoltà: senza asterisco, facili; un asterisco (*), intermedi; due asterischi (**), impegnativi; e tre asterischi (***), difficili. Si tenga presente, tuttavia, che la classificazione della difficoltà è sempre molto soggettiva.
Le fonti degli esercizi sono: gare italiane e di altri paesi, gare internazionali, testi degli Esami di Stato, prove di ammissione a scuole superiori universitarie, riviste. Nella maggior parte dei casi per ogni esercizio viene proposta un'unica soluzione; ma in quasi tutti è possibile trovare delle strategie diverse.
La prima parte del libro espone un compendio di teoremi, lemmi e tecniche risolutive, corredati da esempi; il capitolo quattordici contiene una raccolta di problemi, di difficoltà molto eterogenea, ma di livello medio più impegnativo; nell'ultimo capitolo si trovano le soluzioni di tutti i problemi proposti. Un futuro volume seguirà lo stesso schema ma sarà dedicato alla geometria solida. Da ambedue i volumi sono esclusi argomenti più tecnici, utili per gare di livello più elevato, cui sarà dedicato un ulteriore volume.

Domando scusa in anticipo per tutti gli errori presenti in questo lavoro; chiedo di inviare correzioni o osservazioni all'indirizzo e-mail *mathesisudine@gmail.com.*

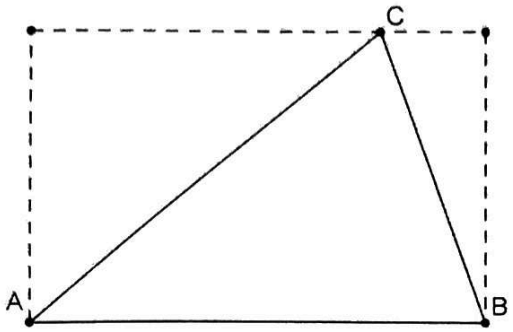
Carlo Càssola

1. Problemi introduttivi

La maggior parte dei problemi olimpici richiedono solo la conoscenza della geometria piana che si studia al primo biennio di una scuola superiore. Tra questi, numerosi sono gli esercizi che si possono risolvere anche con gli strumenti più elementari, come ad esempio la formula per calcolare l'area di un triangolo o le proprietà di un triangolo isoscele.

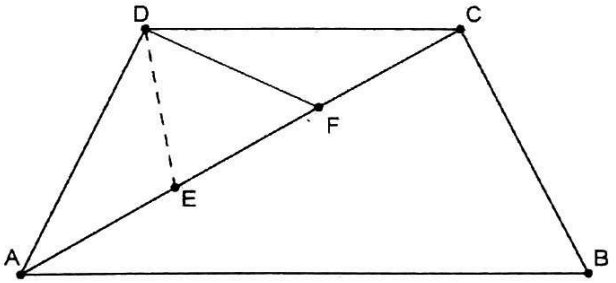
Esempio 1.1. (*Giochi di Archimede 2011, gara biennio*)
Sia ABC un triangolo acutangolo. Costruiamo un rettangolo che abbia un lato coincidente con AB e contenga il punto C sul lato opposto ad AB. Facciamo la stessa costruzione partendo dal lato BC e dal lato CA, ottenendo così tre rettangoli. Allora sicuramente i tre rettangoli hanno: a) perimetri uguali; b) aree uguali; c) somma delle lunghezze delle diagonali uguali; d) uguale rapporto tra lato maggiore e lato minore; e) nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.

Soluzione. È immediato rendersi conto che il rettangolo disegnato ha area doppia di quella del triangolo, dato che ha la stessa base e la stessa altezza. Ma tale caratteristica è propria di ciascuno dei tre rettangoli, quindi la risposta corretta è la *b*: le aree sono tutte uguali.



Si trova facilmente un controesempio per le altre risposte: se si prende un triangolo rettangolo isoscele, infatti, si può agevolmente calcolare che sono false sia la risposta a, sia la c, sia la d. □

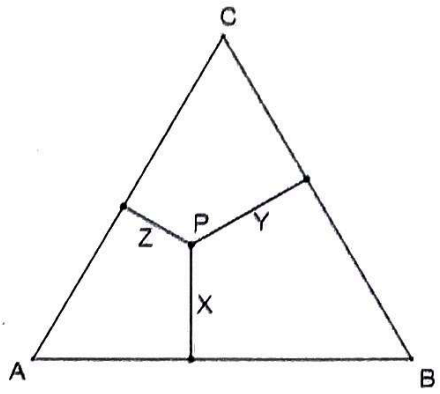
Esempio 1.2. (*Quaestio Copernicana*[1], *maggio 2009*)
In un trapezio qualunque $ABCD$ la base maggiore AB è il triplo della minore DC. Si divida la diagonale AC in tre parti congruenti tramite i punti E e F. Calcolare il rapporto fra l'area totale del trapezio $ABCD$ e l'area del triangolo DEF.



Soluzione. Si inizi con l'osservare che i triangoli AED, EFD e FCD sono equiestesi in quanto i segmenti AE, EF e CD sono congruenti per costruzione, e tutti e tre hanno per altezza la distanza fra D ed AC. Dunque l'area del triangolo DEF è un terzo dell'area di ACD. Si noti ora che l'area di ACD è a sua volta un terzo di quella del triangolo ABC: infatti ABC ha per base AB e per altezza la distanza di C da AB; mentre ACD ha per base CD, che è un terzo di AB, e la medesima altezza. Pertanto l'area di ACD è un quarto dell'area del trapezio; l'area di DEF è un terzo dell'area del triangolo ACD; e, in conclusione, l'area di DEF è un dodicesimo di quella del trapezio $ABCD$. Quindi il rapporto richiesto vale 12. □

[1] La *Quaestio Copernicana* è stata dal 2008 al 2011 una gara interna al Liceo Copernico di Udine. Si veda Càssola, Antoniali, Lamanna 2012.

Esempio 1.3. (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione suppletiva 2004*) Dato un triangolo equilatero, preso un punto P al suo interno o sul suo perimetro, siano x, y, e z le distanze di P dai lati. La somma $x+y+z$ risulta: a) sempre maggiore dell'altezza del triangolo; b) sempre minore dell'altezza; c) sempre uguale all'altezza; d) i dati non sono sufficienti per rispondere.



Soluzione. Si considerino i tre triangoli ABP, BCP e CAP. Ciascuno di essi ha come base un lato (la cui lunghezza chiamiamo l) e come altezza la distanza di P da tale lato; sia h l'altezza del triangolo. La somma delle aree dei tre triangoli è ovviamente uguale all'area di ABC. Dunque:

$$\frac{1}{2}(l \cdot x + l \cdot y + l \cdot z) = \frac{1}{2} l \cdot h$$

da cui, con calcoli elementari, si ricava che la risposta corretta[2] è la c. □

Dall'esempio precedente si può dedurre un'interessante conseguenza:

Lemma 1.1. (*Generalizzazione del Teorema di Viviani*) Dato un poligono regolare di lato l e area $\mathcal{A}$ e un suo punto interno P, la somma delle distanze di P dai lati (o dai loro prolungamenti) è costante, e vale $2\mathcal{A}/l$.

Esempio 1.4. (*Quaestio Copernicana, dicembre 2009*)
In un esagono regolare la somma delle distanze di un punto interno da ciascuno dei lati vale 12. Calcolare il lato dell'esagono.

Soluzione. Per il Lemma 1.1, risulta $12 = 2\mathcal{A}/l$. Ma l'area di un esagono regolare di lato l equivale a quella di sei triangoli equilateri aventi tale lato; dunque $\mathcal{A} = 6 \cdot (\frac{1}{2} l \frac{\sqrt{3}}{2} l) = \frac{3}{2}\sqrt{3} l^2$. Pertanto $l = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$. □

[2] Questa proprietà dei triangoli equilateri è nota anche come *Teorema di Viviani*, dal nome del matematico italiano Vincenzo Viviani (1622-1703).

2. Teorema di Pitagora

Il Teorema di Pitagora è uno degli strumenti cardine nella risoluzione di innumerevoli esercizi, come avviene d'altra parte anche nella matematica scolastica. Lo stesso accade, come si vedrà nel volume II, anche in geometria solida.

Teorema 2.1. *(Teorema di Pitagora[1]) Dato un triangolo rettangolo, il quadrato che ha per lato l'ipotenusa ha area uguale alla somma delle aree dei due quadrati che hanno per lato ciascuno dei due cateti. In simboli: sia a l'ipotenusa, siano b e c i cateti del triangolo rettangolo: $a^2 = b^2 + c^2$.*

Esempio 2.1. (*Giochi di Archimede 1992, gara triennio*)
Nella figura a pagina seguente il cerchio grande ha centro in O e raggio 1. Quanto vale il raggio del cerchio più piccolo?
a) 1/4; b) 5/18; c) $2\sqrt{3}/9$; d) 1/3; e) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Soluzione. Si tracci il triangolo ABC, dove A, B e C sono i centri delle tre circonferenze, come in figura. Sia r il raggio incognito. Il triangolo ACO è rettangolo in O, il segmento AO è lungo 1/2, mentre $AC = 1/2 + r$; $OC = 1 - r$.

[1] Il teorema è attribuito a Pitagora di Samo (vissuto probabilmente intorno al VI secolo a.C.). L'enunciato era noto prima del VI secolo, ma la prima dimostrazione completa si trova negli *Elementi* di Euclide (Elementi, I, 47). A proposito di Euclide si veda capitolo 4, nota 4.

2. Teorema di Pitagora

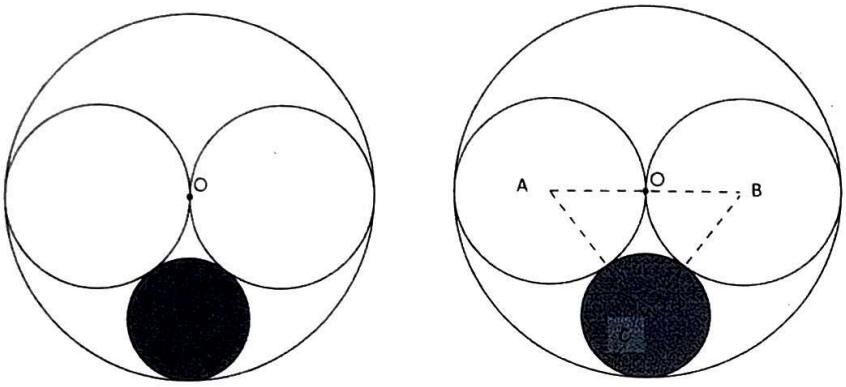
Il Teorema di Pitagora è uno degli strumenti cardine nella risoluzione di innumerevoli esercizi, come avviene d'altra parte anche nella matematica scolastica. Lo stesso accade, come si vedrà nel volume II, anche in geometria solida.

Teorema 2.1. *(Teorema di Pitagora[1]) Dato un triangolo rettangolo, il quadrato che ha per lato l'ipotenusa ha area uguale alla somma delle aree dei due quadrati che hanno per lato ciascuno dei due cateti. In simboli: sia a l'ipotenusa, siano b e c i cateti del triangolo rettangolo: $a^2 = b^2 + c^2$.*

Esempio 2.1. (*Giochi di Archimede 1992, gara triennio*)
Nella figura a pagina seguente il cerchio grande ha centro in O e raggio 1. Quanto vale il raggio del cerchio più piccolo?
a) 1/4; b) 5/18; c) $2\sqrt{3}/9$; d) 1/3; e) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Soluzione. Si tracci il triangolo ABC, dove A, B e C sono i centri delle tre circonferenze, come in figura. Sia r il raggio incognito. Il triangolo ACO è rettangolo in O, il segmento AO è lungo $1/2$, mentre $AC = 1/2 + r$; $OC = 1 - r$.

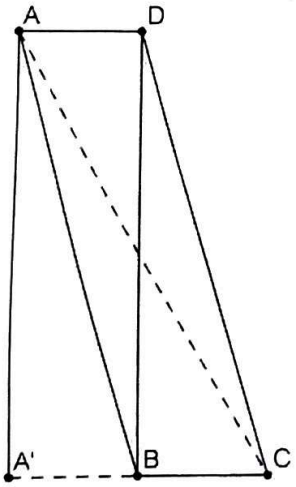
[1] Il teorema è attribuito a Pitagora di Samo (vissuto probabilmente intorno al VI secolo a.C.). L'enunciato era noto prima del VI secolo, ma la prima dimostrazione completa si trova negli *Elementi* di Euclide (Elementi, I, 47). A proposito di Euclide si veda capitolo 4, nota 4.



Applicando il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) in ACO si ottiene: $\left(\frac{1}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-r)^2$. Con facili passaggi si deduce che $r = 1/3$, quindi la risposta corretta è la d. □

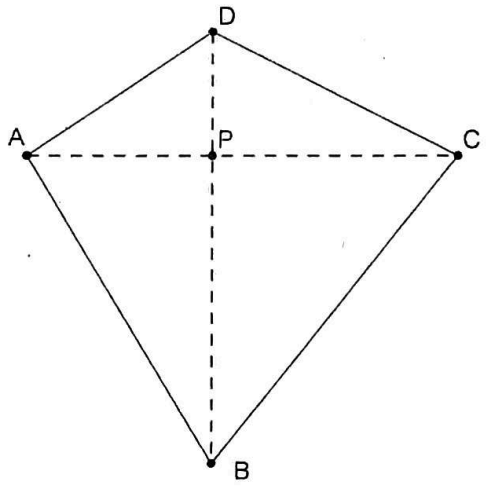
Esempio 2.2. In un parallelogramma $ABCD$ avente lati $AB = 23$ e $BC = 7$ la diagonale minore BD è perpendicolare a BC. Qual è la lunghezza della diagonale maggiore AC?

Soluzione. Se il parallelogramma viene disegnato sulla base BC, la diagonale BD è una sua altezza.



Si proietti allora A sul prolungamento di BC; sia A' la proiezione. $A'B$ è lungo 7 perché $A'BDA$ è un rettangolo. La diagonale AC è ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti $A'C = A'B + BC = 14$ e $AA' = BD$; ma per ipotesi (Teorema di Pitagora, 2.1) $BD^2 = AB^2 - AD^2$. Quindi $AC^2 = A'C^2 + BD^2 = A'C^2 + AB^2 - AD^2 = 14^2 + 23^2 - 7^2$, da cui si ottiene $AC = 26$. □

Esempio 2.3. * (*Gara a squadre on line*[2], *ottobre 2010*)
"La piattaforma è un quadrilatero irregolare, le cui diagonali sono perpendicolari tra loro. Due lati opposti valgono rispettivamente 373 mm e $\sqrt{373}$ mm. Il rapporto fra le due diagonali è 45/47. I quattro segmenti in cui si dividono le diagonali incrociandosi sono espressi, in mm, tutti da numeri interi e il più piccolo dei quattro giace sulla diagonale maggiore." (...) Quanto vale l'area della piattaforma in mm^2? (Dare la risposta divisa per 10).



Soluzione. Poniamo $AD = \sqrt{373}$, $BC = 373$; è inoltre noto che il segmento di diagonale più piccolo appartiene alla diagonale maggiore. Sia dunque P il punto di intersezione delle diagonali e poniamo $PD < PB$. Per il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) $AP^2 + PD^2 = 373$. Noto che AP e PD devono essere numeri interi, si ottiene per tentativi che le loro lunghezze sono 7 e 18; evidentemente il segmento minore, PD, vale 7. Sappiamo dai dati che

$$\frac{AC}{BD} = \frac{18 + PC}{7 + PB} = \frac{45}{47}.$$

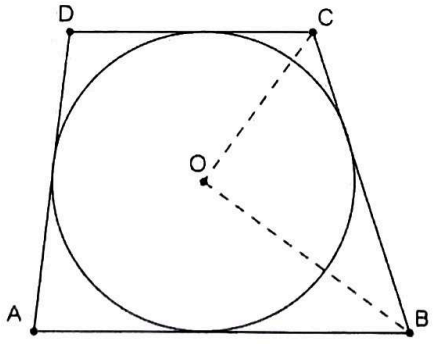
Deve pertanto accadere che 47 divide $(7+PB)$, cioè la lunghezza di PB è congrua a -7 modulo 47. I possibili valori di PB sono: 40, 87, ... 275, ... 369. Nel triangolo PBC l'ipotenusa vale 373, quindi 369 è il valore massimo possibile per PB. Sapendo che $PB^2 + PC^2 = 373^2$, si procede anche in questo caso a tentativi per ottenere che gli unici valori possibili sono: $PB = 275$ e $PC = 252$. In conclusione, le diagonali del quadrilatero valgono 282 e 270: l'area è 282·270/2=38070. La risposta è 3807. □

[2]Le "Gare a squadre on line" citate zi di questa raccolta sono quelle del sito *www.phiquadro.it*, gestito dall'infati a Sandro Campigotto. In bibliografia sono indicate le pubblicazioni che cont di alcune gare svoltesi su questo sito, di cui ho l'onore di essere un co 2011 e Campigotto 2013).

3. Angoli e loro proprietà

Teorema 3.1. *Dato un punto P esterno a una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O, siano T_1 e T_2 i punti di tangenza delle due rette tangenti a $\mathcal{C}$ uscenti da P. Allora i segmenti PT_1 e PT_2 (segmenti di tangenza) sono congruenti, e il segmento OP appartiene alla bisettrice dell'angolo T_1PT_2.*

Esempio 3.1. Sia dato un trapezio circoscritto a una circonferenza di centro O. Dimostrare che i segmenti che congiungono O con i vertici dei lati obliqui sono fra loro perpendicolari.



Soluzione. Si dica BC uno dei lati obliqui di un siffatto trapezio, di basi AB e CD. Per il parallelismo delle basi, gli angoli interni adiacenti al lato obliquo di un qualsiasi trapezio sono supplementari (si veda oltre, Teorema 3.5). Ora, se si considerano i punti di tangenza fra BC e la circonferenza e fra CD e la

circonferenza, grazie al Teorema 3.1 si dimostra che OC appartiene alla bisettrice dell'angolo interno in C; per il medesimo ragionamento il segmento OB appartiene alla bisettrice dell'angolo interno in B. Ne consegue che $\widehat{BCO} + \widehat{OBC} = 90°$, da cui si deduce che il triangolo OBC è rettangolo in O, come si voleva dimostrare. Ragionamento analogo può essere seguito per l'altro lato obliquo. □

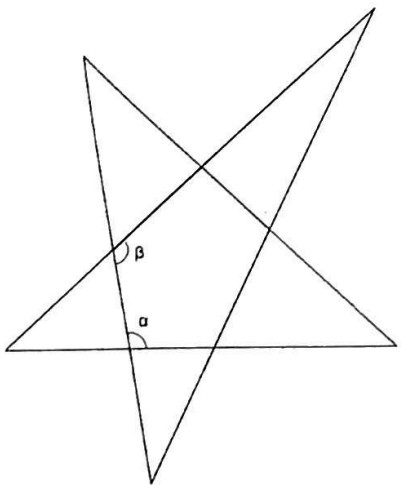
Teorema 3.2. *La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo piatto.*

Lemma 3.3. Dato un poligono convesso di n lati, la somma dei suoi angoli interni è pari a $(n-2) \cdot 180°$. Se il poligono è regolare, ciascuno dei suoi angoli interni vale $(n-2) \cdot 180°/n$.

Il lemma deriva immediatamente dalla scomponibilità del poligono in $n-2$ triangoli tramite le $n-3$ diagonali uscenti da un vertice qualsiasi ed è quindi diretta conseguenza del Teorema 3.2.

Teorema 3.4. *(Teorema dell'angolo esterno[1]) Ciascun angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma dei due angoli interni a esso non adiacenti.*

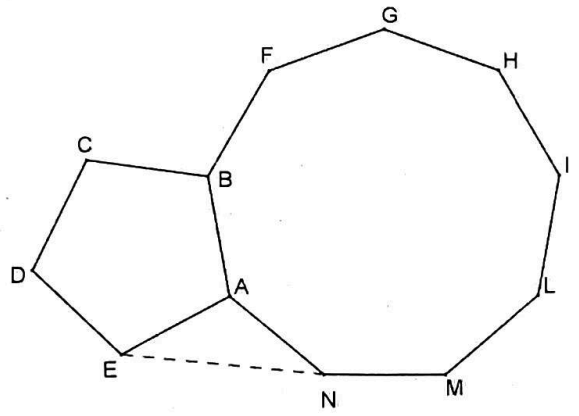
Esempio 3.2. (*American Mathematics Competition[2], 1966*)
Una stella a n punte è costruita in questo modo: dato un poligono convesso a n lati, numerati consecutivamente da 1 a n, tale che le coppie di lati k e $k+2$ non siano mai paralleli; si prolunghino tutti i lati k e $k+2$ fino al loro punto di intersezione. Quanto vale la somma S degli angoli che si vengono a formare nelle n punte della stella?
a) 180°; b) 360°; c) $(n+2) \cdot 180°$; d) $(n-2) \cdot 180°$; e) $(n-4) \cdot 180°$.



[1] Noto a volte anche come *Secondo teorema dell'angolo esterno.*
[2] Nome generico di un gruppo di gare matematiche degli Stati Uniti.

Soluzione. La stella è formata in questo modo (in figura l'esempio con $n = 5$): su ogni lato del poligono è costruito esternamente un triangolo, tale che i suoi angoli adiacenti al lato siano supplementari dei rispettivi angoli interni del poligono stesso. Siano α e β tali angoli: pertanto l'angolo al vertice della stella è pari a $180° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta - 180°$. Se si sommano gli n angoli nelle punte della stella, si otterrà un totale S in cui ciascuno degli angoli interni del poligono è contato due volte, e un angolo piatto viene sottratto tante volte quanti sono i lati. Noto che la somma degli angoli interni è $(n-2)\cdot 180$ (Lemma 3.3), $S = 2\cdot[(n-2)\cdot 180°] - n\cdot 180° = (n-4)\cdot 180°$; la risposta corretta è la *e*. □

Esempio 3.3. Un pentagono regolare $ABCDE$ ha in comune il lato AB con l'ennagono regolare $ABFGHILMN$. Si tracci ora il segmento EN. Quanto vale l'angolo $\widehat{AEN}$, in gradi?



Soluzione. Gli angoli interni del pentagono valgono 108°, quelli dell'ennagono 140° (Lemma 3.3). Pertanto, dato che $\widehat{EAB} + \widehat{BAN} + \widehat{EAN} = 360°$, si deduce che $\widehat{EAN} = 112°$. Il triangolo EAN è isoscele (i lati del pentagono e dell'ennagono sono congruenti), quindi i suoi angoli adiacenti alla base EN sono congruenti fra loro e valgono 34° (Teorema 3.4). □

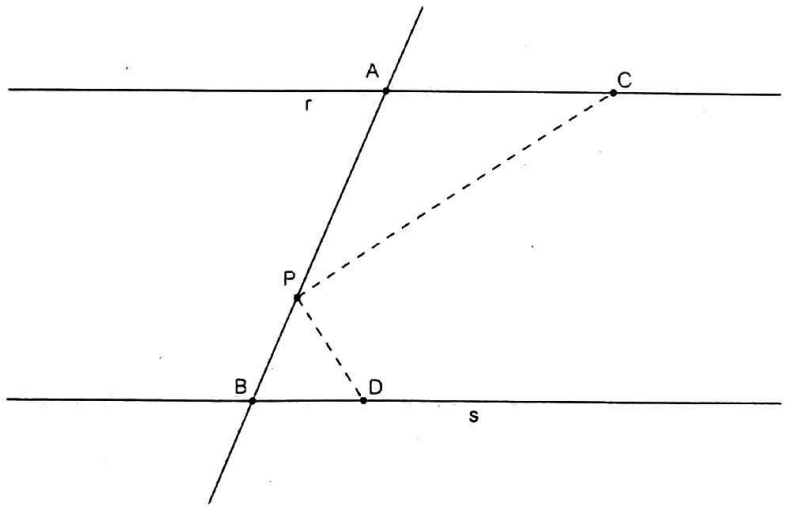
Teorema 3.5. *Se due rette sono tagliate da una trasversale, ciascuna delle seguenti è condizione necessaria e sufficiente affinché esse siano parallele:*

- *formano angoli alterni interni congruenti;*
- *formano angoli alterni esterni congruenti;*
- *formano angoli corrispondenti congruenti;*
- *formano angoli coniugati interni supplementari;*
- *formano angoli coniugati esterni supplementari.*

Dal teorema segue un interessante lemma:

Lemma 3.6. Le bisettrici di due angoli coniugati interni fra rette parallele sono perpendicolari (si veda anche l'Esempio 3.1); le bisettrici di due angoli alterni interni, di due angoli alterni esterni e di due angoli corrispondenti sono parallele.

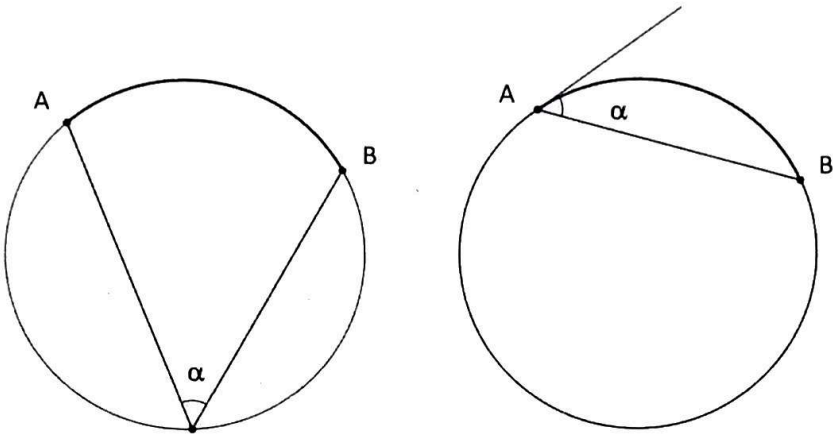
Esempio 3.4. Due rette parallele r e s sono tagliate da una trasversale nei punti A e B. Si prenda sul segmento AB un punto P. Sulle rette r e s, rispettivamente e dalla stessa parte rispetto alla trasversale, si traccino i segmenti $AC = AP$ e $BD = BP$. Dimostrare che l'angolo $\widehat{CPD}$ è retto.



Soluzione. Gli angoli $\widehat{CAP}$ e $\widehat{PBD}$ sono supplementari perché coniugati interni fra rette parallele (Teorema 3.5). I triangoli APC e BDP sono isosceli per costruzione; quindi hanno angoli alla base congruenti. Siano $\alpha = \widehat{APC} = \widehat{PCA}$ e $\beta = \widehat{DPB} = \widehat{BDP}$. Nei triangoli considerati risulta: $\alpha = (180° - \widehat{CAP})/2$ e $\beta = (180° - \widehat{PBD})/2$ (Teorema 3.2). Veniamo ora all'angolo richiesto: risulta $\widehat{CPD} = 180° - \alpha - \beta$. Sostituendo: $\widehat{CPD} = 180° - (180° - \widehat{CAP})/2 - (180° - \widehat{PBD})/2$, cioè $\widehat{CPD} = 180° - 180°/2 + \widehat{CAP}/2 - 180°/2 + \widehat{PBD}/2$. E infine $\widehat{CPD} = (\widehat{CAP} + \widehat{PBD})/2 = 180°/2 = 90°$, che è quanto si doveva dimostrare. □

Teorema 3.7. *(Teorema degli angoli al centro e alla circonferenza) Tutti gli angoli aventi vertice su una circonferenza che insistono sul medesimo arco sono congruenti fra loro e congruenti alla metà dell'angolo al centro che insiste su tale arco. Angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono fra loro congruenti.*

Si osservi che esistono due tipi di angoli alla circonferenza (l'uno formato da due corde, l'altro da una corda e una tangente), come illustrato dalla figura, e che il teorema vale in ambedue i casi.



Due angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda, aventi vertici ciascuno su uno dei due archi opposti rispetto alla corda, sono supplementari.

Lemma 3.8. Sussiste anche l'implicazione opposta al Teorema 3.7: se gli estremi di un segmento AB, congiunti con due punti C e D, appartenenti allo stesso semipiano (rispetto ad AB), formano due angoli $\widehat{ACB}$ e $\widehat{ADB}$ fra loro congruenti, allora i punti A, B, C e D appartengono a una circonferenza.

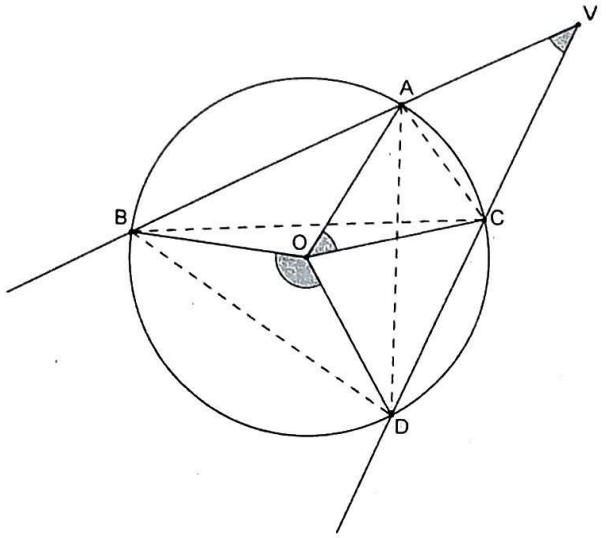
Dal Teorema 3.7 discende una proprietà molto nota e molto importante:

Lemma 3.9. Se si congiungono gli estremi di un diametro di una circonferenza con un punto qualsiasi della circonferenza medesima, il triangolo ottenuto è sempre rettangolo; oppure, definizione equivalente, un triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre rettangolo.

Lemma 3.10. Data una tangente in T a una circonferenza di centro O, il raggio TO è perpendicolare alla tangente; data una corda di una circonferenza, il raggio passante per il suo punto medio è perpendicolare alla corda.

Esempio 3.5. * (*Quaestio Copernicana, marzo 2009*)
Da un punto esterno a una circonferenza si conducano due secanti; esse formano con la circonferenza due corde qualsiasi. Dimostrare che l'angolo fra le due secanti è congruente alla semidifferenza fra i due angoli al centro che sottendono i due archi interni alle secanti.

Soluzione. Sia V il vertice dell'angolo, AB la corda formata da una delle due secanti, CD quella formata dall'altra secante; sia infine O il centro della circonferenza. Il quesito chiede di dimostrare che $\widehat{AVC} = (\widehat{BOD} - \widehat{AOC})/2$.



Tracciati i segmenti BC e AD si noti che gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ sono congruenti in quanto angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco; per il Teorema 3.7 essi sono inoltre congruenti alla metà di $\widehat{AOC}$; per lo stesso teorema $\widehat{BAD}$ è congruente a $\widehat{BCD}$ ed entrambi sono pari alla metà di $\widehat{BOD}$. Pertanto la tesi può essere riscritta in questo modo: dimostrare che $\widehat{AVC} = \widehat{BAD} - \widehat{ABC}$. Si consideri ora il triangolo BCV: noto che la somma dei suoi angoli interni è uguale a un angolo piatto (Teorema 3.2),

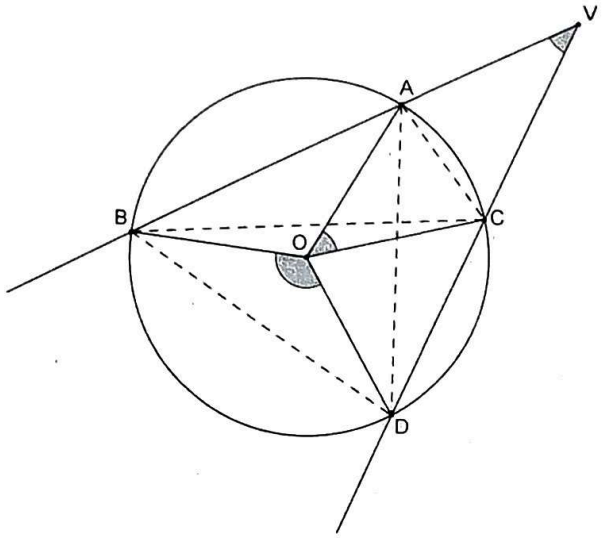
$$\widehat{AVC} = 180° - \widehat{BCV} - \widehat{ABC}\,.$$

L'angolo $\widehat{BCV}$ è però supplementare a $\widehat{BCD}$ in quanto angoli adiacenti (formanti un angolo piatto). Quindi:

$$\widehat{AVC} = (180° - \widehat{BCV}) - \widehat{ABC} = \widehat{BCD} - \widehat{ABC} = \widehat{BAD} - \widehat{ABC}$$

L'ultima espressione è equivalente alla tesi, che è dunque dimostrata. □
Si veda più avanti, Esempio 10.2, per uno svolgimento alternativo dell'Esempio 3.5.

Esempio 3.6. (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 1989*)
Su una circonferenza consideriamo cinque punti che chiamiamo, ordinatamente, A, M, B, C, D, e sia M equidistante da A e B (vedi figura). Siano inoltre E ed F rispettivamente le intersezioni di MD con AC e di MC con BD. Si dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è inscrivibile in una circonferenza.



Tracciati i segmenti BC e AD si noti che gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ sono congruenti in quanto angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco; per il Teorema 3.7 essi sono inoltre congruenti alla metà di $\widehat{AOC}$; per lo stesso teorema $\widehat{BAD}$ è congruente a $\widehat{BCD}$ ed entrambi sono pari alla metà di $\widehat{BOD}$. Pertanto la tesi può essere riscritta in questo modo: dimostrare che $\widehat{AVC} = \widehat{BAD} - \widehat{ABC}$. Si consideri ora il triangolo BCV: noto che la somma dei suoi angoli interni è uguale a un angolo piatto (Teorema 3.2),

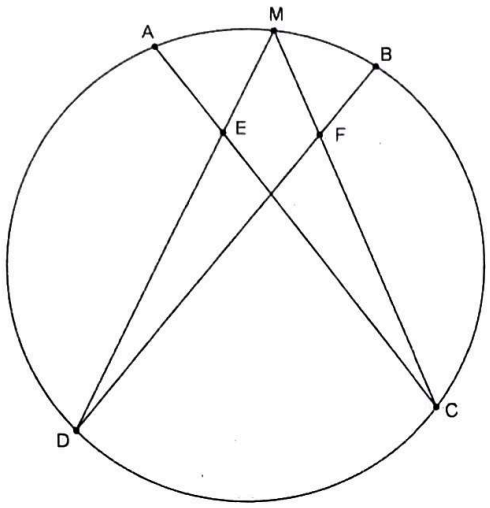
$$\widehat{AVC} = 180° - \widehat{BCV} - \widehat{ABC}\,.$$

L'angolo $\widehat{BCV}$ è però supplementare a $\widehat{BCD}$ in quanto angoli adiacenti (formanti un angolo piatto). Quindi:

$$\widehat{AVC} = (180° - \widehat{BCV}) - \widehat{ABC} = \widehat{BCD} - \widehat{ABC} = \widehat{BAD} - \widehat{ABC}$$

L'ultima espressione è equivalente alla tesi, che è dunque dimostrata. □
Si veda più avanti, Esempio 10.2, per uno svolgimento alternativo dell'Esempio 3.5.

Esempio 3.6. (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 1989*)
Su una circonferenza consideriamo cinque punti che chiamiamo, ordinatamente, A, M, B, C, D, e sia M equidistante da A e B (vedi figura). Siano inoltre E ed F rispettivamente le intersezioni di MD con AC e di MC con BD. Si dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è inscrivibile in una circonferenza.



Soluzione. L'angolo $\widehat{MDB}$ è congruente all'angolo $\widehat{ACM}$ perché essi insistono su archi congruenti, AM e MB (Lemma 3.7). Dunque il segmento EF è sotteso da due angoli congruenti; pertanto, per il Lemma 3.8, i punti C, D, E, ed F appartengono a una circonferenza. □

4. Similitudine

Teorema 4.1. *Due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati ordinatamente in proporzione. Date due figure simili il rapporto fra due lati corrispondenti si dice rapporto di similitudine. In due figure che hanno rapporto di similitudine k, il rapporto fra diagonali, altezze e altri segmenti corrispondenti è il medesimo; le aree stanno invece fra loro in rapporto k^2.*

Lemma 4.2. Tutti i poligoni regolari aventi un numero fissato di lati sono simili fra loro.

È possibile generalizzare il concetto di similitudine anche a figure che non siano poligoni. In senso molto più generale, si definisce similitudine una trasformazione del piano in sé tale che, dati due punti qualunque A e B che distano fra loro d, i loro trasformati A' e B' distino kd; k è il rapporto di similitudine.
In questo modo si conclude che tutte le circonferenze sono simili tra loro, e così pure tutte le parabole. La proprietà non vale invece, ad esempio, per le ellissi (sono simili solo famiglie di ellissi aventi tutte la stessa eccentricità).

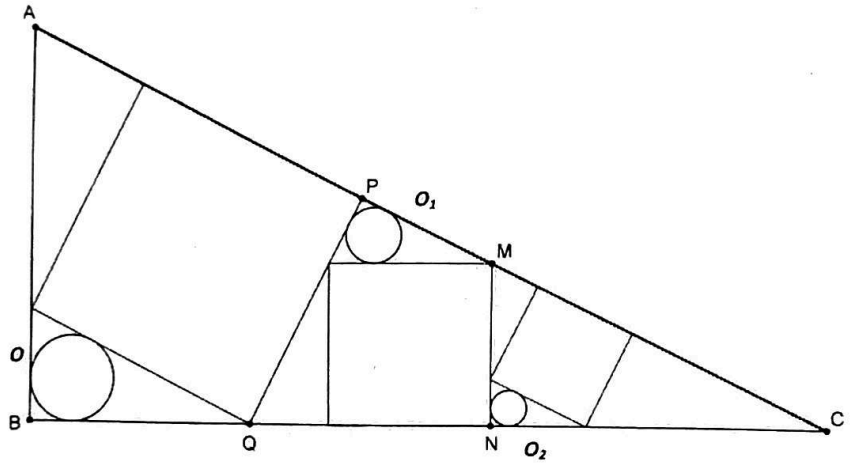
Teorema 4.3. *(Primo criterio di similitudine dei triangoli) Se due triangoli hanno due angoli congruenti, allora sono simili.*

Teorema 4.4. *(Secondo criterio di similitudine dei triangoli) Se due triangoli hanno un angolo congruente e i lati ad esso adiacenti in proporzione, allora sono simili.*

Teorema 4.5. *(Terzo criterio di similitudine dei triangoli) Se due triangoli hanno i lati in proporzione, allora sono simili.*

Nella risoluzione di problemi posti alle competizioni matematiche, il criterio di similitudine fra triangoli solitamente più utile è il primo.

Esempio 4.1. * *(Stage di Cortona[1], 2001)*
In un triangolo rettangolo sono inscritti tre quadrati e tre cerchi, come nella figura seguente; ciascun cerchio è inscritto nel triangolo rettangolo che gli compete. Sapendo che i diametri di O e O_2 sono rispettivamente 9 e 4, si determini il diametro di O_1.



Soluzione. I triangoli ABC e MNC sono simili: hanno infatti in comune l'angolo in C e sono entrambi rettangoli (Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3). Il rapporto di similitudine Teorema 4.1), come si desume dai diametri delle circonferenze, è $9/4$. Ma anche il triangolo PQC è simile ai primi due, per lo stesso motivo. Per come è costruita la figura, il rapporto di similitudine k fra ABC e PQC è il medesimo di quello fra PQC e MNC, e perciò vale $k = \sqrt{9/4} = 3/2$. Quindi il diametro d di O_1 è medio proporzionale fra 9 e 4, pertanto $9 : d = d : 4$. Il diametro della circonferenza O_1 vale dunque 6. □

Teorema 4.6. *Congiungendo i punti medi M e N dei lati AB e BC di un triangolo ABC si ottiene il triangolo MNB, simile ad ABC, avente rapporto di similitudine 1/2 con il triangolo di partenza. Il segmento MN è parallelo ad AC perché forma angoli corrispondenti congruenti (si veda il Teorema 3.5).*

[1] Gli stage di Cortona si sono svolti fino al 2002: erano incontri intensivi per la selezione e la preparazione della squadra italiana per le Olimpiadi internazionali. Ora gli stage si svolgono a Pisa, con una diversa organizzazione. Si veda anche la nota al Problema 33 (capitolo 14).

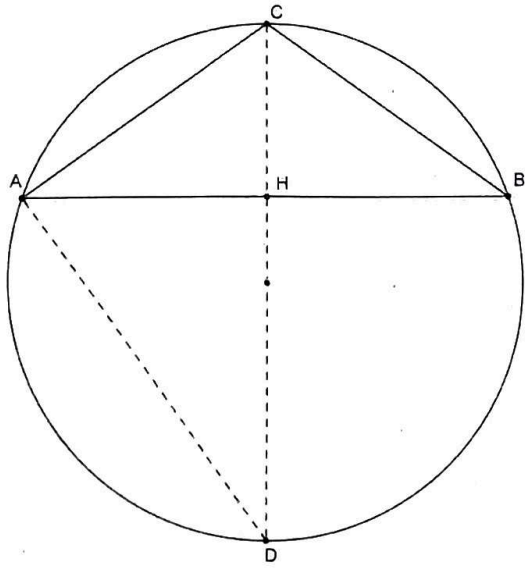
Il teorema può essere generalizzato nel modo seguente: se su due lati AB e AC di un triangolo uscenti da un vertice A si tracciano due punti P e Q tali che sia $AP/AB = AQ/AC = k$, il triangolo APQ è simile al triangolo ABC e k è il rapporto di similitudine[2].

Teorema 4.7. *(Teorema di Talete[3]) Dato un insieme di rette parallele e due rette secanti, le parallele staccano sulle secanti segmenti corrispondenti proporzionali.*

Teorema 4.8. *(Primo teorema di Euclide[4]) In un triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale fra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.*

Teorema 4.9. *(Secondo teorema di Euclide) In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Esempio 4.2. Dato un triangolo isoscele, verificare che l'altezza, il lato obliquo e il diametro della circonferenza circoscritta sono in progressione geometrica.



[2]La proprietà vale anche se $k > 1$, e quindi se P e Q appartengono ai prolungamenti di AB e AC.

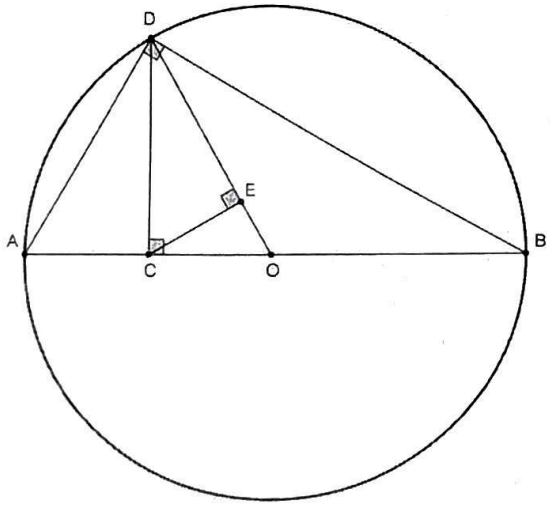
[3]Il teorema è attribuito al filosofo greco Talete di Mileto (VII-VI secolo a.C.), ma la prima dimostrazione nota si trova negli *Elementi* di Euclide (Elementi, VI.2). A proposito di Euclide si veda la nota 4.

[4]Euclide di Alessandria (IV-III secolo a.C.), matematico greco, autore degli *Elementi*, uno dei più importanti trattati matematici della storia. Ambedue le proposizioni oggi note come *Teoremi di Euclide* sono enunciate nel Porisma al Teorema 8 del libro VI degli Elementi.

Soluzione. Sia ABC il triangolo, isoscele sulla base AB. Si prolunghi l'altezza CH relativa alla base, in modo da tracciare un diametro CD della circonferenza circoscritta (Lemma 3.10); si congiunga quindi D con A. Il triangolo CDA è rettangolo (Lemma 3.9), e vi è pertanto applicabile il Primo teorema di Euclide (Teorema 4.8): il cateto CA (lato obliquo di ABC) è medio proporzionale fra l'altezza CH e il diametro CD. Sia dunque $q = CA/CH = CD/CA$: ne consegue che CH, CA e CD sono in progressione geometrica, di primo termine CH e di ragione q. □

Esempio 4.3. (*Compitone*[5] *Copernico Udine, 2007*)
Su una circonferenza di diametro AB e centro O si fissi un punto qualunque D che non cada sugli estremi del diametro. Sia C la proiezione di D su AB. Sia E la proiezione di C su OD. Dimostrare che:
a) OD è la media aritmetica di AC e BC;
b) DC è la media geometrica di AC e BC;
c) ED è la media armonica[6] di AC e BC.

Soluzione. La prima richiesta è molto semplice: $AC + CB = AB = 2r = 2OD$, quindi $OD = \dfrac{AC + CB}{2}$.



[5]Ogni anno tutte le classi quinte del Liceo Copernico di Udine svolgono un'esercitazione in preparazione alla prova scritta dell'Esame di Stato. Tale esercitazione è chiamata volgarmente "Compitone". Si veda Antoniali, Càssola, Donatis, Rossit 2014.

[6]Si ricordi che la media armonica x_h di due numeri positivi non nulli x_1 e x_2 è

$$x_h = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

La risposta al quesito successivo è conseguenza diretta del Secondo teorema di Euclide (Teorema 4.9): nel triangolo rettangolo ABD, retto in D in quanto inscritto in una semicirconferenza di diametro AB (Lemma 3.9), vale infatti $CD^2 = AC \cdot CB$, dunque $CD = \sqrt{AC \cdot CB}$. Il terzo quesito chiede di mostrare che

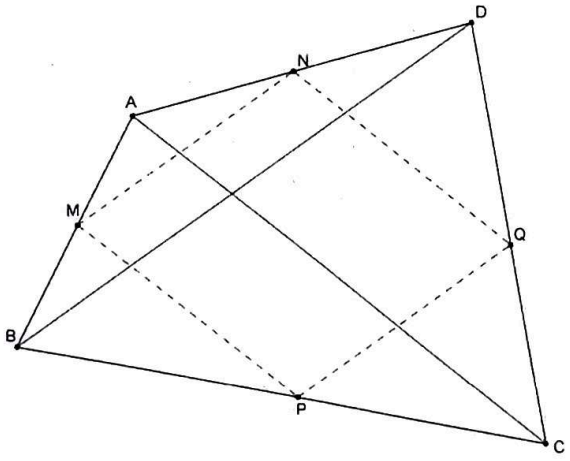
$$DE = 2 \cdot \frac{AC \cdot CB}{AC + CB} = 2 \cdot \frac{CD^2}{2 \cdot OD} = \frac{CD^2}{OD};$$

ma tale uguaglianza deriva dal Primo teorema di Euclide (Teorema 4.8) applicato al triangolo DCO: si ottiene $CD^2 = DE \cdot OD$, da cui $DE = CD^2/OD$. □

Teorema 4.10. *(Teorema di Varignon[7]) Dato un quadrilatero qualsiasi, il quadrilatero ottenuto congiungendo i punti medi dei suoi lati è sempre un parallelogramma.*

Esempio 4.4. Dimostrare il Teorema 4.10.

Soluzione. Dimostriamo il teorema nel caso in cui $ABCD$ sia un quadrilatero convesso qualunque. Si traccino i punti medi M e N di AB e DA.



Il segmento MN è parallelo alla diagonale BD per il Teorema 4.6. Per lo stesso motivo anche il segmento PQ costruito congiungendo i punti medi P e Q dei lati BC e CD è parallelo alla medesima diagonale. Dunque $MN \parallel PQ$. Ma tracciando la diagonale CA si ottiene, per lo stesso motivo, che $PM \parallel QN$. I lati di $MPQN$ sono a due a due paralleli, pertanto tale quadrilatero è un parallelogramma[8]. La dimostrazione del Teorema di Varignon per quadrilateri concavi o intrecciati si svolge con i medesimi strumenti. □

Lemma 4.11. Il parallelogramma formato congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero ha area pari alla metà di quella del quadrilatero di partenza.

[7] Pierre Varignon (1654-1722), matematico e fisico francese.

[8] Sui criteri per stabilire se un quadrilatero sia un parallelogramma, si veda oltre, Teorema 8.1.

5. Punti notevoli di un triangolo

In questo capitolo verrà enunciata una lunga lista di teoremi importanti, inframmezzati da esempi.

Teorema 5.1. *Le altezze di un triangolo concorrono e il loro punto di incontro è detto ortocentro.*

Teorema 5.2. *Le mediane di un triangolo concorrono e il loro punto di incontro è detto baricentro.*

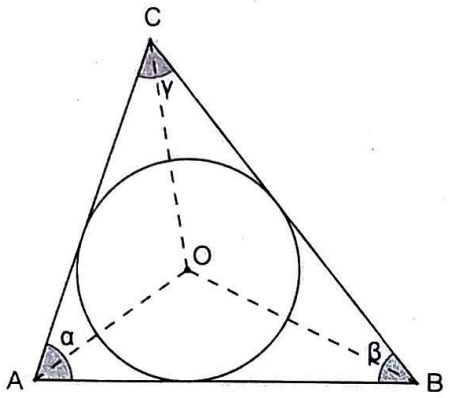
Teorema 5.3. *(Teorema del baricentro) Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.*

Lemma 5.4. Ogni mediana divide il triangolo in due triangoli fra loro equiestesi. Se si tracciano tutte le mediane di un triangolo, queste lo dividono in sei triangoli, fra loro equiestesi.

Teorema 5.5. *Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo concorrono e il loro punto di incontro è detto incentro.*

L'incentro, essendo equidistante dai tre lati del triangolo (in quanto appartenente alle bisettrici), è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo[1].

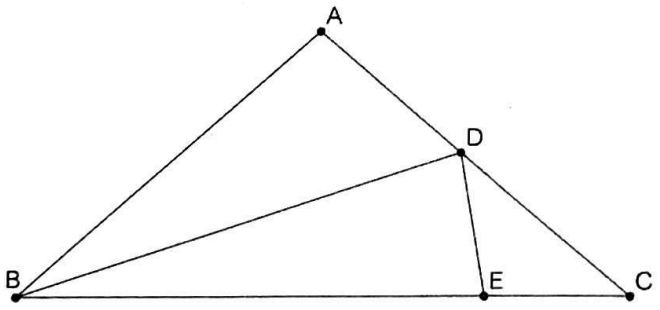
[1] In un triangolo non degenere è sempre possibile inscrivere una circonferenza.



Una proprietà dell'incentro che può risultare utile è la seguente: siano α, β e γ gli angoli interni di un triangolo ABC e sia O il suo incentro. Risulta allora che $\widehat{COB} + \beta/2 + \gamma/2 = 180°$ (Teorema 3.2); dunque $\widehat{COB} = 180° - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$; ma, sempre dal Teorema 3.2, $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, quindi, inserendo nella precedente, $\widehat{COB} = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \alpha/2$. Uguale ragionamento porta a calcolare $\widehat{BOA}$ e $\widehat{AOC}$.

Teorema 5.6. *(Teorema della bisettrice) La bisettrice di ciascun angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti proporzionali agli altri due lati.*

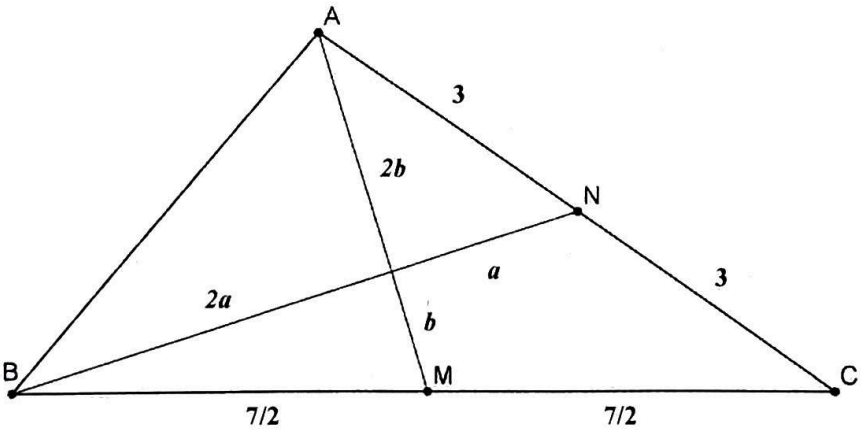
Esempio 5.1. * (*Selezione per lo Stage di Cortona, 1997*) Sia ABC un triangolo isoscele con $AB = AC$. Si supponga che la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ incontri il lato AC nel punto D e che $BC = BD + AD$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\widehat{BAC}$.



Soluzione. Si tracci su BC il punto E in modo che sia $BE = BD$; ma per ipotesi $BC = BD + AD$, da cui si deduce che $EC = AD$. Per il Teorema della bisettrice (Teorema 5.6) vale la seguente proporzione: $CD : AD = BC : AB$; ricordando che $AB = AC$ e $EC = AD$ e sostituendo si ottiene la proporzione $CD : EC = BC : AC$. Ciò è sufficiente per concludere che i triangoli ABC e

CDE sono simili: infatti hanno in comune l'angolo $\widehat{ECD}$ e due lati in proporzione. Sono pertanto simili per il secondo criterio (Teorema 4.4). Ne consegue che anche CDE è isoscele sulla base CD, e quindi $EC = DE$. Posto $y = \widehat{ECD}$ si ha che $\widehat{DEC} = 180° - 2y$; ma nel triangolo BDE, a sua volta isoscele per costruzione ($BD = BE$), si ha che $\widehat{BED} = (180° - y/2)/2 = 90° - y/4$ (si ricordi che BD è bisettrice e di conseguenza divide $\widehat{ABC}$ in due angoli pari a $y/2$). Infine, osservando che $\widehat{BED}$ e $\widehat{DEC}$ sono supplementari, si ha che: $180° - (180° - 2y) = 90° - y/4$ da cui $y = 40°$. L'angolo richiesto, $\widehat{BAC}$, vale dunque $180° - 40° - 40° = 100°$ gradi. □

Esempio 5.2. (*American Mathematics Competition, 1970*)
Nel triangolo ABC la mediana uscente da A è perpendicolare a quella uscente da B. Se le lunghezze dei lati AC e BC sono rispettivamente 6 e 7, allora la lunghezza di AB è:
a) $\sqrt{17}$; b) 4; c) 4 e $\frac{1}{2}$; d) $2\sqrt{5}$; e) $4\frac{1}{4}$.



Soluzione. Le mediane AM e BN concorrono nel baricentro G (Teorema 5.2). Per il Teorema del baricentro (Teorema 5.3) i segmenti AM e BN sono divisi dal baricentro in due parti di cui una è doppia dell'altra; siano a e $2a$ le due parti in cui è diviso BN e b e $2b$ quelle in cui è diviso AM. Ma essendo le due mediane perpendicolari per ipotesi, è possibile utilizzare il Teorema di Pitagora nei triangoli AGN e BGM: $a^2 + 4b^2 = 9$; $b^2 + 4a^2 = 49/4$. Sommando termine a termine si ottiene: $5a^2 + 5b^2 = 85/4$; si divida quest'ultima relazione per 5/4: si ricava $4a^2 + 4b^2 = 17$. Ma, sempre per il Teorema di Pitagora (in ABG), il lato cercato AB vale $\sqrt{4a^2 + 4b^2} = \sqrt{17}$; pertanto la risposta corretta è la a. □

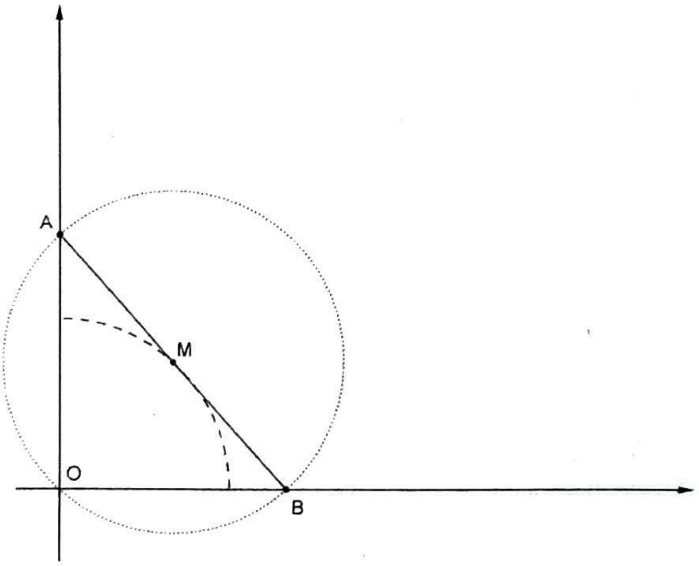
Teorema 5.7. *Gli assi dei lati di un triangolo concorrono e il loro punto di incontro è detto circocentro.*

Il circocentro, essendo equidistante dai tre vertici del triangolo (in quanto appartenente agli assi), è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Dal momento che per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza, un triangolo non degenere ha sempre una circonferenza circoscritta.

Lemma 5.8. Il baricentro e l'incentro sono sempre interni al triangolo; l'ortocentro e il circocentro sono interni se il triangolo è acutangolo, esterni se è ottusangolo. Se il triangolo è rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa (si veda a questo proposito anche il Lemma 3.9) e l'ortocentro è il vertice dell'angolo retto.

Teorema 5.9. *Un triangolo è isoscele su un suo lato se e solo se:*
- l'altezza e la mediana relative a tale lato coincidono;
- l'altezza e la bisettrice relative a tale lato coincidono;
- la mediana e la bisettrice relative a tale lato coincidono;
- l'asse del lato passa per il vertice opposto.
Di conseguenza, in un triangolo equilatero altezze, mediane, bisettrici e assi coincidono; ortocentro, baricentro, incentro e circocentro coincidono.

Esempio 5.3. * (*Compitone Copernico Udine, 2012*)
Un segmento di lunghezza unitaria è situato nel primo quadrante del piano cartesiano e i suoi estremi giacciono sui semiassi x e y. Determinare il luogo dei punti medi del segmento al variare della sua posizione.

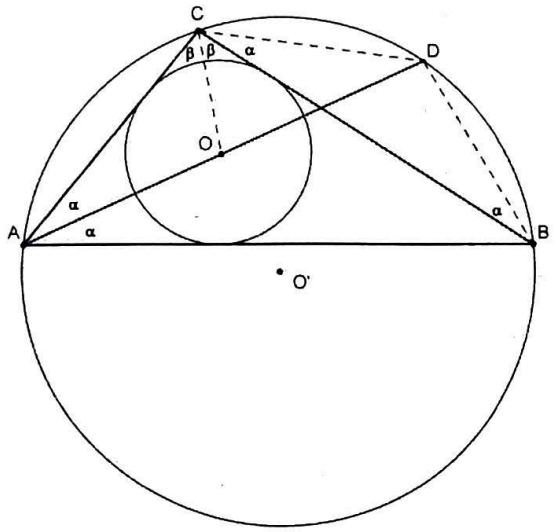


Soluzione[2]**.** Si consideri il segmento posto in posizione generica, secondo i vincoli fissati: i suoi estremi A e B formano, assieme all'origine degli assi O, un triangolo

[2]Per una dimostrazione alternativa si veda il capitolo dedicato alla geometria analitica, Esempio 5.3.

rettangolo ABO di ipotenusa AB. Dal Lemma 5.8 segue che il circocentro coincide col punto medio dell'ipotenusa: sia M tale punto. Il circocentro, per definizione (Teorema 5.7), dista dai tre vertici una quantità pari a metà dell'ipotenusa stessa, quindi pari a $1/2$. Il segmento MO vale pertanto $1/2$, indipendentemente dalla posizione del segmento AB. Il luogo dei punti M è un arco di circonferenza (più precisamente, un quarto) di centro O e di raggio $1/2$. □

Esempio 5.4. * (*American Mathematics Competition, 1966*)
Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O'. Una circonferenza di centro O è a sua volta inscritta in ABC. Si tracci il segmento AO, e lo si prolunghi fino a incontrare la circonferenza più grande nel punto D. Allora accade che:
a) $CD = BD = O'D$; b) $AO = CO = OD$; c) $CD = CO = BD$;
d) $CD = OD = BD$; e) $O'B = O'C = OD$.

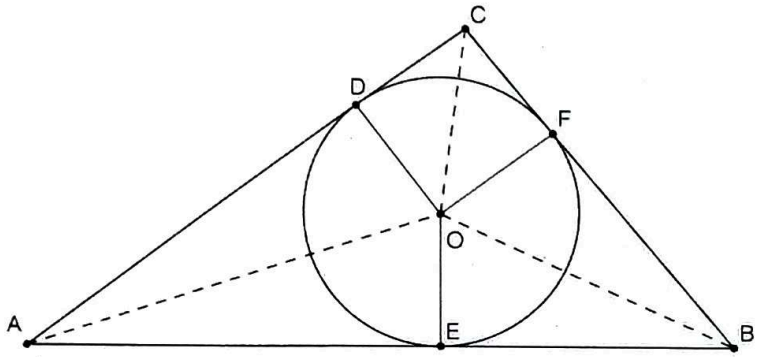


Soluzione. Si osserva immediatamente che essendo AB e AC segmenti di tangenza della circonferenza inscritta, AD è bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ (Teorema 3.1); sia α la metà di tale angolo. Le corde CD e DB, sottese da angoli alla circonferenza congruenti, hanno la medesima lunghezza (Teorema 3.7). Con lo stesso ragionamento, CO è bisettrice dell'angolo $\widehat{ACB}$: sia β la sua metà. Gli angoli $\widehat{DCB}$ e $\widehat{CBD}$ sono congruenti, in quanto si è appena dimostrato che il triangolo CDB è isoscele sulla base CB, e uguali ad α (Teorema 3.1). Nel triangolo COD, di conseguenza, risulta che l'angolo $\widehat{DCO} = \alpha + \beta$. Ma l'angolo $\widehat{COD}$ è angolo esterno del triangolo AOC, pertanto equivale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, e cioè proprio $\alpha + \beta$ (Teorema 3.4). Se ne conclude che il triangolo COD è isoscele sulla base CO, e quindi $CD = OD$; la risposta corretta è la *d*. □

Una formula utile è la seguente:

Lemma 5.10. La lunghezza del raggio r della circonferenza inscritta in un triangolo[3] equivale all'area divisa per il semiperimetro: $r = \mathcal{A}/p$.

Esempio 5.5. Dimostrare il Lemma 5.10.



Soluzione. Se si congiunge l'incentro O (Teorema 5.5) con i vertici del triangolo, si ottengono tre triangoli ciascuno dei quali ha per base uno dei lati e per altezza il raggio r della circonferenza. La somma delle aree dei triangoli equivale all'area $\mathcal{A}$ di ABC. Quindi $\frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CA \cdot r = \mathcal{A}$, da cui $\frac{1}{2}r \cdot (AB + BC + CA) = \mathcal{A}$; ma $\frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ è il semiperimetro p. Pertanto $r = \mathcal{A}/p$. □

Esempio 5.6. (*Esame di Stato Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero 2011 - Europa*)
Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d.

Soluzione. I lati valgono x, $x + d$, $x + 2d$. Dal momento che il triangolo è rettangolo, vale il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1): $(x + 2d)^2 = (x + d)^2 + x^2$. Risolvendo l'equazione si ricava $x = 3d$; le lunghezze dei lati sono quindi $3d$, $4d$ e $5d$. Dal Lemma 5.10, il raggio della circonferenza inscritta vale:

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p} = \frac{(3d \cdot 4d)/2}{(3d + 4d + 5d)/2} = \frac{12d^2}{12d} = d\,,$$

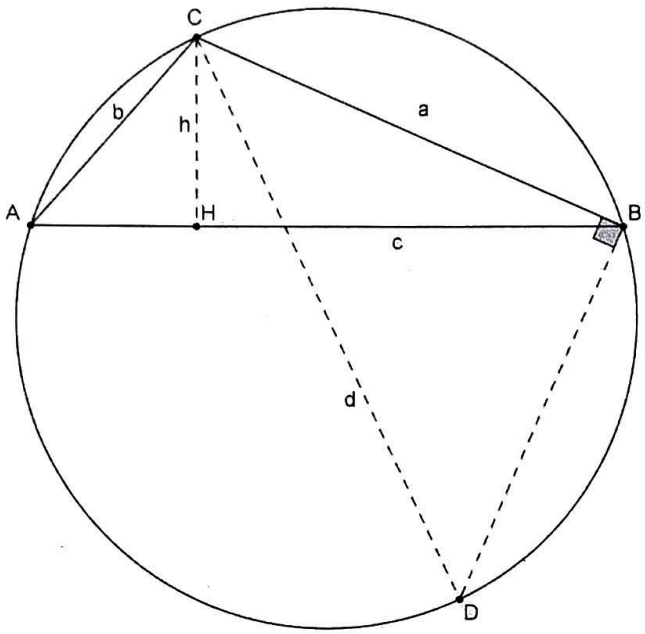
come si voleva dimostrare. □

Lemma 5.11. La lunghezza del raggio R della circonferenza circoscritta a un triangolo di lati a, b e c equivale al prodotto abc diviso per il quadruplo dell'area $\mathcal{A}$ del triangolo. In simboli, $R = \dfrac{abc}{4\mathcal{A}}$.

[3] Per una generalizzazione a un poligono qualunque si veda il Lemma 8.5.

Esempio 5.7. * Dimostrare il Lemma 5.11.

Soluzione. Sia $CH = h$ l'altezza del triangolo ABC relativa alla base $AB = c$. Si costruisca il diametro CD della circonferenza circoscritta e si congiunga D con B. L'angolo $\widehat{DBC}$ è retto perché insiste su un diametro (Lemma 3.9).



I triangoli AHC e CDB sono simili: sono infatti entrambi rettangoli ($\widehat{AHC} = \widehat{DBC} = 90°$) e hanno gli angoli $\widehat{CAH}$ e $\widehat{CDB}$ congruenti perché ambedue insistono sulla corda CB (Teorema 3.7). Dunque è possibile costruire la seguente proporzione: $CD : AC = CB : CH$; ma $CD = 2R$, $CB = a$, $CA = b$, quindi $2R = ab/h$. Si moltiplichi ora per c sia il numeratore sia il denominatore, e si divida l'uguaglianza per 2: $R = abc/(2hc)$; ma h è l'altezza relativa al lato $AB = c$, pertanto

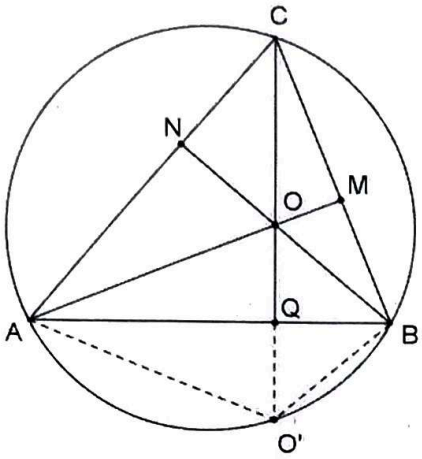
$$2hc = 4 \cdot \frac{1}{2} hc = 4\mathcal{A},$$

da cui la formula cercata. □

Lemma 5.12. In un triangolo i punti simmetrici dell'ortocentro rispetto ai lati appartengono alla circonferenza circoscritta.

Esempio 5.8. * Dimostrare il Lemma 5.12.

Soluzione. Sia O l'ortocentro. Dimostriamo che $\widehat{AOB} + \widehat{ACB} = 180°$.



Si osservi allora che $\widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 180°$ in quanto angoli adiacenti. Ma gli angoli $\widehat{BOM}$ e $\widehat{OBM}$ sono complementari in quanto angoli acuti del triangolo rettangolo BMO; e per lo stesso motivo sono complementari $\widehat{OBM}$ e $\widehat{ACB}$; dunque $\widehat{BOM} = \widehat{ACB}$ in quanto complementari dello stesso angolo. Ma si era poc'anzi dimostrato che $\widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 180°$, da cui $\widehat{AOB} + \widehat{ACB} = 180°$, come richiesto. Si noti che lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere anche dimostrando la similitudine fra il triangolo BMO e il triangolo BCN. Per concludere si prenda ora O', simmetrico dell'ortocentro O rispetto al lato AB. Si dimostra agevolmente che i triangoli AOB e $AO'B$ sono congruenti, da cui che $\widehat{AO'B} = \widehat{AOB}$. Nel quadrilatero $AO'BC$ pertanto gli angoli opposti sono supplementari, in quanto $\widehat{AO'B} + \widehat{ACB} = 180°$. Dunque $AO'BC$ è un quadrilatero ciclico (si veda oltre, Teorema 9.1), cioè esiste una circonferenza cui appartengono tutti i suoi vertici; tale circonferenza, dal momento che passa per A, B e C è la circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Ne segue che O' appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC; con ragionamenti analoghi si ottiene che anche i punti simmetrici di O rispetto agli altri due lati appartengono a tale circonferenza, come si voleva dimostrare. Si osservi che il punto O, essendo l'ortocentro, non è il centro della circonferenza circoscritta ad ABC; il centro di tale circonferenza è, come noto, il circocentro (Teorema 5.7), che non coincide con l'ortocentro se non nel caso in cui il triangolo sia equilatero (Teorema 5.9). □

6. Formula di Erone

La Formula di Erone[1] è particolarmente utile per calcolare l'area di un triangolo quando sono noti i lati ma non si hanno informazioni sugli angoli[2].

Lemma 6.1. (*Formula di Erone*[3]) L'area $\mathcal{A}$ di un triangolo di lati a, b e c è data dalla formula $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, dove p è il semiperimetro del triangolo.

Esempio 6.1. (*Gara a squadre Summer Math Camp*[4]*, 2015*)
All'interno di un triangolo ABC di lati $AB = 9$, $BC = 17$ e $CA = 10$ un punto P dista 2 da AB e 1 da CA. Quanto dista da BC? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione[5]. Se si congiunge P con A, B e C, il triangolo ABC è diviso in tre triangoli le cui altezze sono le distanze di P dai lati (si veda anche l'Esempio 5.5). La somma delle aree dei tre triangoli può essere calcolata facilmente con la Formula

[1] Erone di Alessandria (I secolo d.C.), matematico e ingegnere greco.

[2] Le informazioni sugli angoli si possono comunque ottenere per via trigonometrica, tramite il Teorema del coseno (si veda oltre, Teorema 12.5).

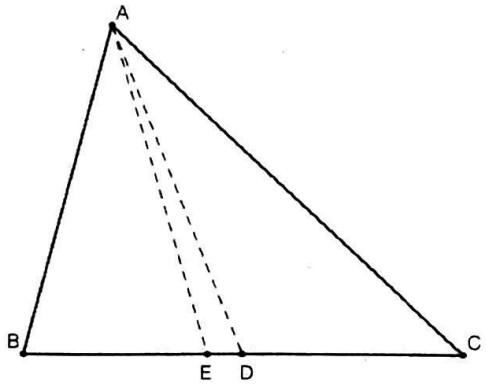
[3] La formula è dimostrata in *Metrica*, I,8, e nel capitolo 30 del trattato intitolato *Dioptra*; ma secondo Heath 1981 (pag. 322), la prima dimostrazione sarebbe di Archimede.

[4] Il Summer Math Camp è un campo estivo dedicato a matematica, giochi e vita all'aria aperta organizzato annualmente dalla Mathesis di Udine.

[5] L'esercizio si sarebbe anche potuto svolgere utilizzando il Teorema di Viviani generalizzato (si veda oltre, Capitolo 14, Problema 3).

di Erone (Lemma 6.1), e vale 36. L'area di ABP è $\frac{1}{2}AB \cdot 2 = 9$; l'area di CAP è $\frac{1}{2}CA \cdot 1 = 5$; pertanto l'area di BCP è $36 - 9 - 5 = 22$. Dunque $\frac{1}{2}BC \cdot h = 22$, da cui $h = 44/17$, che essendo l'altezza di BCP rispetto alla base BC è appunto la distanza di P da BC; la risposta che si doveva fornire è 44+17=61. □

Esempio 6.2. (*American Mathematics Competition, 2000*)
Nel triangolo ABC $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$. Sia D il punto medio di BC ed E l'intersezione fra BC e la bisettrice dell'angolo BAC. Quale fra i seguenti numeri è il più vicino all'area del triangolo ADE?
a) 2; b) 2,5; c) 3; d) 3,5; e) 4;.



Soluzione. La mediana AD divide il lato BC in due parti uguali: $BD = DC = 7$. Per il Teorema della bisettrice (Teorema 5.6) vale la proporzione: $BE : 13 = EC : 15$. Noto che $BE + EC = 14$ si ottiene facilmente che $BE = 13/2$, da cui $ED = BD - BE = 7 - 13/2 = 1/2$. Ora, con la Formula di Erone (Lemma 6.1) si calcola agevolmente che l'area di ABC è 84, quindi l'altezza relativa a BC vale 12. Il triangolo ADE ha dunque altezza 12 sulla base DE che è lunga $1/2$. A questo punto si calcola la sua area, che vale 3. La risposta giusta è infine la *c*. □

Esempio 6.3. ** (*Junior Balkan Mathematical Olympiad*[6])
Trovare tutti i triangoli che abbiano le lunghezze dei lati pari a un numero intero e semiperimetro avente lo stesso valore dell'area[7].

Soluzione. La richiesta è che, dal punto di vista numerico, sia $p = \mathcal{A}$. Siano i lati a, b e c, la cui lunghezza è pari a un numero intero. Utilizzando la Formula di Erone (Lemma 6.1) si ottiene che

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,;$$

[6]La *Junior Balkan Mathematical Olympiad* è una gara di matematica che interessa i paesi dell'area balcanica. L'esercizio è tratto da una raccolta di problemi di allenamento.

[7]Palesemente questa uguaglianza è scorretta dal punto di vista dimensionale.

$$\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \mathcal{A}(\mathcal{A}-a)(\mathcal{A}-b)(\mathcal{A}-c)\,,$$
$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}-a)(\mathcal{A}-b)(\mathcal{A}-c) \qquad (1)$$

Si osservi a questo punto che, essendo per ipotesi $2\mathcal{A} = a+b+c$, $2\mathcal{A}$ è un numero intero, e quindi $\mathcal{A}$ può essere scritto nella forma $k/2$ per un opportuno intero k. Supponiamo ora che k sia dispari; dalla (1) si otterrebbe

$$\frac{k}{2} = \left(\frac{k}{2}-a\right)\left(\frac{k}{2}-b\right)\left(\frac{k}{2}-c\right),$$
$$\frac{k}{2} = \frac{k-2a}{2}\cdot\frac{k-2b}{2}\cdot\frac{k-2c}{2},$$

e infine:

$$2k = \frac{1}{2}\cdot(k-2a)(k-2b)(k-2c)\,.$$

I tre fattori in parentesi a destra sono tutti dispari, quindi il secondo termine dell'uguaglianza non è intero. Ciò è assurdo, perché k era un numero intero. L'ipotesi che ci ha condotto all'assurdo era che k fosse dispari: dunque k è pari e l'area $\mathcal{A}$ del triangolo deve essere un numero intero[8]. Perciò i tre numeri $\mathcal{A}-a$, $\mathcal{A}-b$, $\mathcal{A}-c$ sono interi (e, ovviamente, positivi). Senza perdita di generalità, supponiamo sia $a \le b \le c$. Siano $d = \mathcal{A}-a$, $e = \mathcal{A}-b$, $f = \mathcal{A}-c$; risulta allora che $d \ge e \ge f \ge 0$. La (1) diventa allora: $\mathcal{A} = def$. A questo punto si ricordi che per ipotesi era $2\mathcal{A} = a+b+c$: ne consegue che $\mathcal{A} = 3\mathcal{A} - 2\mathcal{A} = 3\mathcal{A} - a - b - c = \mathcal{A}-a+\mathcal{A}-b+\mathcal{A}-c = d+e+f$. Da cui si deduce infine: $def = d+e+f$. Rielaborando quest'ultima uguaglianza si ricava $d(ef-1) = e+f$; ora, essendo $d \ge e \ge f \ge 0$, vale la seguente catena: $e(ef-1) \le d(ef-1) = e+f \le 2e$, da cui $e(ef-1) \le 2e$. Semplificando per e si ottiene $ef-1 \le 2$, cioè $ef \le 3$. Ma $f \le e$ e quindi $f^2 \le 3$; l'unico valore possibile per f è 1. La relazione $def = d+e+f$ diventa ora $de = d+e+1$, da cui $e(d-1) = d+1$; mettendo in evidenza e:

$$e = \frac{d+1}{d-1} = \frac{d-1+2}{d-1} = 1 + \frac{2}{d-1}\,.$$

I numeri d ed e sono interi e positivi, quindi gli unici valori possibili per d sono 2 e 3. Ma se $d = 2$, risulta $e = 3$ il che è impossibile perché $d \ge e$. L'unico valore possibile per d è allora 3, e pertanto $e = 2$. In conclusione, l'area del triangolo è $\mathcal{A} = d+e+f = 6$ e i lati sono: $a = \mathcal{A}-d = 6-3 = 3$, $b = \mathcal{A}-e = 6-2 = 4$ e $c = \mathcal{A}-f = 6-1 = 5$. La soluzione trovata è unica. □

[8] Un triangolo avente lunghezze dei lati e area pari a numeri interi viene talvolta detto *triangolo eroniano*.

7. Conteggio di diagonali

In questo breve capitolo saranno esaminati alcuni esercizi di conteggio che prendono spunto dalla geometria, ma che in realtà sono problemi di combinatoria.

Lemma 7.1. Un poligono di n lati ha $n(n-3)/2$ diagonali.

Infatti ogni vertice può essere congiunto con altri $n-3$ (esso non può essere collegato con se stesso, né con i due adiacenti, perché si otterrebbe un lato e non una diagonale). Ma i vertici sono n, quindi si moltiplica $n \cdot (n-3)$; in questo modo ogni diagonale è stata contata due volte, una per ciascuno dei suoi due estremi. Dunque le diagonali sono $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Esempio 7.1. Esiste un poligono convesso che abbia 76 diagonali?

Soluzione. Non esiste un poligono convesso con 76 diagonali. Infatti l'equazione $76 = n(n-3)/2$ (Lemma 7.1), equivalente a $n^2 - 3n - 152 = 0$, non ha soluzioni intere[1]. □

Esempio 7.2. ** Calcolare la somma delle diagonali di tutti i poligoni convessi aventi numero di lati compreso fra 3 e n, con $n \geq 3$.

[1] Per inciso, un poligono di 13 lati ha 65 diagonali, e uno di 14 ne ha 77.

Soluzione. La richiesta equivale a calcolare $\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-3)}{2}$ (Lemma 7.1). Per comodità, si calcoli la sommatoria a partire da 1 e non da 3, sottraendo i termini in più:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-3)}{2} - \frac{1(1-3)}{2} - \frac{2(2-3)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-3)}{2} + 2\,.$$

Risulta, svolgendo i calcoli:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-3)}{2} + 2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 3k) + 2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3k\right] + 2\,.$$

Grazie a due note formule:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2}\right] + 2 = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 9n^2 - 9n}{6}\right] + 2 = \frac{n^3 - 3n^2 - 4n}{6} + 2 = \\
&= \frac{n^3 - 3n^2 - 4n + 12}{6} = \frac{(n-3)(n-2)(n+2)}{6}\,,
\end{aligned}$$

che è il risultato cercato. □

8. Quadrilateri e altri poligoni

Teorema 8.1. *Le seguenti condizioni sono equivalenti: condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia un parallelogramma è che*

- *i lati opposti siano a due a due paralleli (questa è generalmente la definizione di parallelogramma);*
- *i lati opposti siano a due a due congruenti;*
- *una coppia di lati opposti siano paralleli e congruenti;*
- *gli angoli opposti siano congruenti;*
- *gli angoli consecutivi siano a due a due supplementari;*
- *le diagonali si bisechino.*

Spesso (ma non sempre) la condizione più facile da dimostrare è che le diagonali si bisecano reciprocamente.
Le seguenti condizioni sono equivalenti: condizione necessaria e sufficiente affinché un dato quadrilatero sia un rettangolo è che

- *sia un parallelogramma e le sue diagonali siano congruenti;*
- *sia un parallelogramma e uno dei suoi angoli sia retto;*
- *abbia tutti gli angoli retti.*

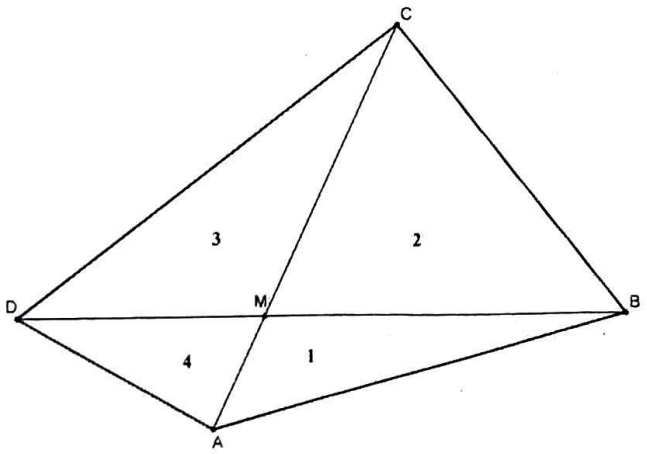
Le seguenti condizioni sono equivalenti: condizione necessaria e sufficiente affinché un dato parallelogramma sia un rombo è che

- *le sue diagonali siano perpendicolari;*
- *due suoi lati consecutivi siano congruenti.*

Infine, condizione necessaria e sufficiente affinché un dato parallelogramma sia un quadrato è che

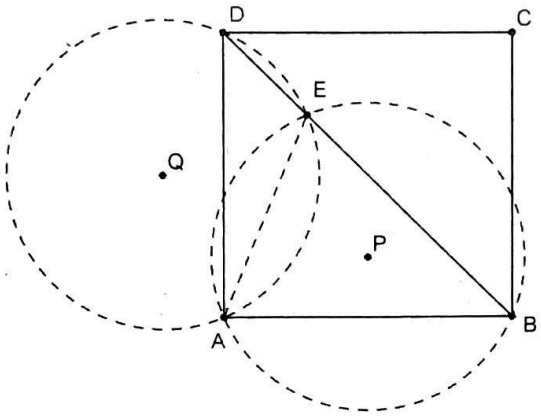
- *esso sia contemporaneamente un rombo e un rettangolo;*
- *sia un parallelogramma con diagonali congruenti e perpendicolari;*
- *sia un rettangolo con due lati consecutivi congruenti;*
- *sia un rombo con le diagonali congruenti;*
- *sia un rombo con un angolo retto.*

Esempio 8.1. * (*Ammissione alla Scuola Normale di Pisa, 2012*)
Un quadrilatero convesso $ABCD$ è diviso da ciascuna diagonale in due triangoli di uguale area. Si dimostri che $ABCD$ è un parallelogramma.



Soluzione. Dato che le coppie di triangoli sono a due a due equiestese, si ha che le distanze di A e C dalla diagonale BD devono essere congruenti, e così pure le distanze di B e D dalla diagonale AC. Detto M il punto di intersezione fra le diagonali, si denotino con 1, 2, 3 e 4 le aree dei triangoli in cui è diviso il quadrilatero. Vale per ipotesi che 1+2=3+4 e 2+3=1+4. Da ciò si deduce che 2=4 e 1=3; ma 2 e 4 hanno uguale altezza rispetto alle basi DM e MB, quindi devono avere uguale base: $DM = MB$. Lo stesso accade per 1 e 3, perciò $AM = MC$. Allora M è il punto medio delle diagonali, e ciò dimostra, grazie al Teorema 8.1, che $ABCD$ è un parallelogramma. □

Esempio 8.2. * (*Olimpiadi nazionali Australia, 2006*)
Nel quadrato $ABCD$ si prenda un punto E sulla diagonale BD. P e Q sono i circocentri rispettivamente dei triangoli ABE e ADE. Dimostrare che $APEQ$ è un quadrato.



Soluzione. Sia il punto P sia il punto Q appartengono all'asse di AE per costruzione, quindi le diagonali AE e PQ del quadrilatero $APEQ$ sono perpendicolari. Le diagonali, inoltre, si bisecano: è infatti ovvio per quanto appena detto che PQ passa per il punto medio di AE. Ma anche AE biseca PQ, dal momento che le due circonferenze hanno lo stesso raggio: per questo è sufficiente osservare che gli angoli supplementari $\widehat{DEA}$ e $\widehat{AEB}$ sottendono corde uguali (DA e AB) nelle due circonferenze (si veda il commento al Teorema 3.7). Dunque il quadrilatero è un parallelogramma con diagonali perpendicolari, e cioè è un rombo (Teorema 8.1). A questo punto è sufficiente dimostrare che uno dei suoi angoli è retto (Teorema 8.1). L'angolo $\widehat{APE}$ è un angolo al centro che insiste sulla corda AE; a esso corrisponde un angolo alla circonferenza $\widehat{ABE}$ che vale metà di un angolo retto (è formato da un lato del quadrato $ABCD$ e da una sua diagonale); ne consegue che $\widehat{APE} = 2\widehat{ABE} = 90°$. $APEQ$, pertanto, è un quadrato. □

Lemma 8.2. Un quadrilatero può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se la somma delle lunghezze di due lati opposti è congruente alla somma delle lunghezze degli altri due lati.

La proprietà discende automaticamente dalla congruenza dei segmenti di tangenza (Teorema 3.1). Si osservi che un rettangolo (a meno che non sia un quadrato) e un parallelogramma (a meno che non sia un rombo) non possono mai essere circoscritti a una circonferenza.

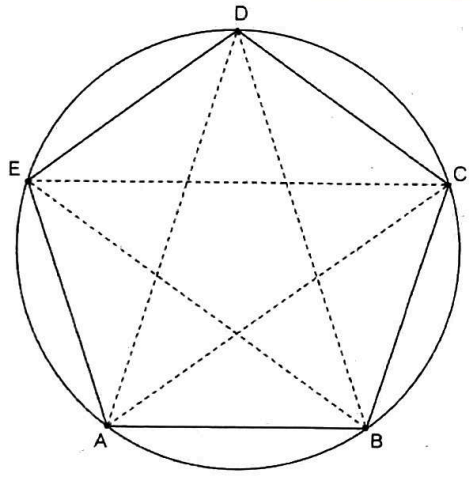
Lemma 8.3. Se un poligono inscritto in una circonferenza ha tutti i lati congruenti allora ha anche gli angoli interni congruenti; quindi il poligono è regolare. Ciò segue immediatamente da semplici considerazioni sugli angoli, che vengono lasciate per esercizio al lettore.

Non vale l'implicazione inversa: un poligono inscritto in una circonferenza avente gli angoli congruenti non è necessariamente equilatero: si pensi, ad esempio, a un rettangolo.

È utile ricordare che:

Lemma 8.4. Il lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r ha lunghezza $r\sqrt{3}$; il lato del quadrato inscritto ha lunghezza $r\sqrt{2}$; il lato dell'esagono regolare[1] ha lunghezza r.

Esempio 8.3. (*Olimpiadi nazionali Gran Bretagna, 1992*)
Un pentagono è inscritto in una circonferenza, e ogni sua diagonale è parallela ad uno dei suoi lati; si dimostri che il pentagono è regolare.

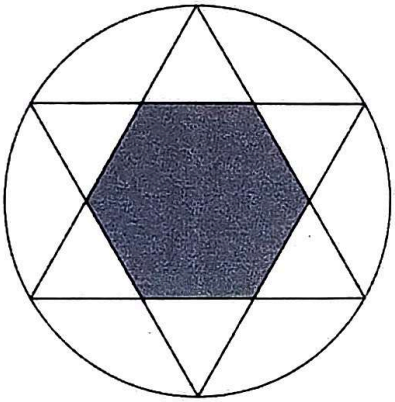


Soluzione. Sia $ABCDE$ il pentagono; per ipotesi $AB \| EC$, $BC \| AD$, $CD \| BE$, $DE \| CA$ e $EA \| DB$. Si consideri ora il quadrilatero $ABCE$: esso è un trapezio in quanto $AB \| EC$, ma essendo inscritto in una circonferenza è isoscele, da cui $BC = EA$. Passando al trapezio $BCDA$ con lo stesso ragionamento si dimostra $AB = CD$; proseguendo si ottengono altre tre coppie di lati congruenti, per cui, per la proprietà transitiva, $AB = BC = CD = DE = EA$. Pertanto i lati sono congruenti. Per il Lemma 8.3 un poligono avente lati congruenti, inscrivibile in una circonferenza, ha anche angoli congruenti, il che è quanto si doveva dimostrare. □

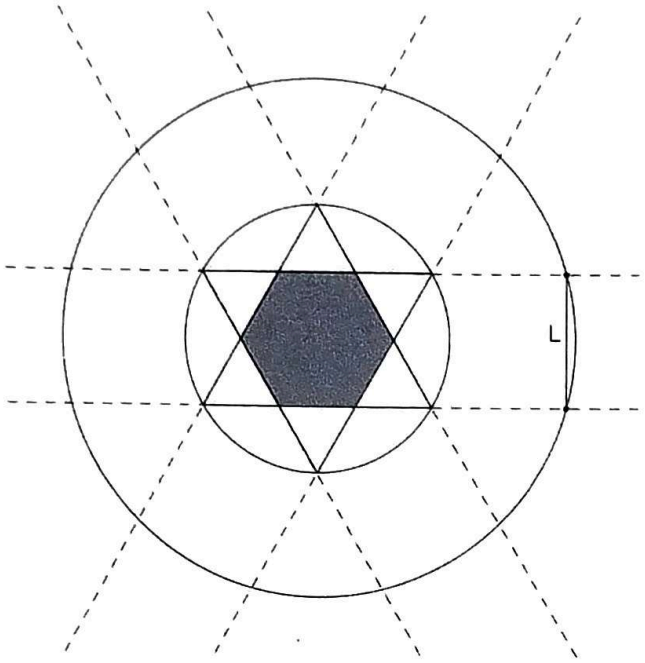
[1] Si veda oltre, nel capitolo sulla trigonometria, Esempio 12.7, per il lato dell'ottagono regolare e del dodecagono regolare.

Esempio 8.4. ** (*Gara a squadre on line, ottobre 2009*)
Una stazione spaziale ha la forma di un prisma retto, con base esagonale regolare il cui lato misura 100 m. Per evitare il surriscaldamento dovuto ai raggi solari, il modulo spaziale è stato messo in rotazione attorno al suo asse. Un astronauta dello Shuttle, guardando dall'oblò durante una riparazione, ha notato che, dal suo punto di osservazione per metà del tempo si vedono contemporaneamente 3 pareti (ovviamente sotto angolazioni variabili) e per metà del tempo se ne vedono solo 2. A che distanza si trova l'astronauta dall'asse di rotazione della stazione spaziale?

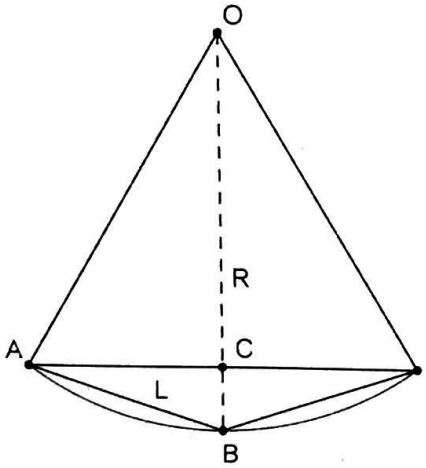
Soluzione. Innanzitutto, non si tratta di un problema di geometria solida, nonostante il testo parli di un prisma, perché può essere svolto considerando una sezione del prisma perpendicolare alle sue facce laterali (si veda la seguente figura).



Si osservi poi che se l'astronauta è troppo vicino alla stazione spaziale, non avrà mai la possibilità di vedere tre pareti contemporaneamente. Anzi, se si trova all'interno della circonferenza indicata nella figura precedente, ci sono delle fasi in cui vede due pareti e altre in cui ne vede soltanto una. Si supponga allora che l'astronauta sia adeguatamente distante da poter vedere a volte tre pareti, a volte due. Nella figura alla pagina seguente, la circonferenza più esterna rappresenta la posizione dell'astronauta rispetto alla stazione spaziale. Si osservi che la circonferenza è divisa in 12 archi: di questi, quelli delimitati da coppie di rette parallele rappresentano le fasi in cui l'astronauta vede solo due pareti; gli archi delimitati da coppie di rette secanti descrivono invece le fasi in cui vede tre pareti. Il testo del problema afferma "per metà tempo"; quindi le sei fasi di un tipo devono essere equivalenti alle sei fasi dell'altro tipo. Ciò si verifica se i dodici archi in cui è suddivisa la circonferenza esterna sono tutti congruenti fra loro.



Per facilitare la visualizzazione, si pensi ora a un dodecagono regolare inscritto nella circonferenza (in figura è indicato con L uno dei suoi lati). Si evince dalla figura che la lunghezza di L deve eguagliare quella di una diagonale minore dell'esagono, che vale $100\sqrt{3}$. Il problema equivale quindi a calcolare il raggio R di una circonferenza in cui sia inscritto un dodecagono regolare[2] di lato fissato L.



In figura è indicato un settore circolare delimitato da due raggi, in cui $OA = OB = R$ e $AB = L = 100\sqrt{3}$. Nel triangolo ABC, rettangolo in C, si ha che $AB = 100\sqrt{3}$; $BC = OB - OC = R - (\sqrt{3}/2)R$; $AC = R/2$. Si può dunque applicare il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1):

$$L^2 = \left(R - \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 ,$$

[2]Si veda oltre, Esempio 12.7, per un calcolo trigonometrico del lato di un dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r.

$$L^2 = R^2 + \frac{3}{4}R^2 - \sqrt{3}R^2 + \frac{R^2}{4},$$
$$L^2 = (2 - \sqrt{3})R^2,$$

da cui

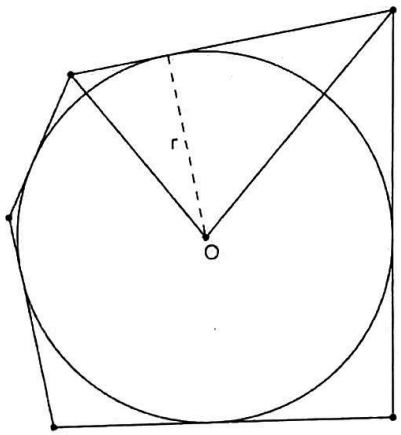
$$R = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Ora lo studente doveva ingegnarsi per calcolare un'approssimazione del numero trovato: il risultato si ottiene, ad esempio, amplificando la frazione per $\sqrt{2}$, svolgendo il radicale doppio e infine razionalizzando. Si ricava $R = 334,4\ldots$; la risposta da fornire è dunque 334. □

Può a volte risultare utile il seguente:

Lemma 8.5. L'area di un poligono circoscritto a una circonferenza è uguale al semiperimetro del poligono moltiplicato per il raggio della circonferenza.

Questo lemma è un'evidente generalizzazione del Lemma 5.10.



Esempio 8.5. Un quadrilatero $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di raggio 5. La sua area vale 105, mentre $AB = 11$ e $BC = 7$. Qual è la lunghezza degli altri due lati?

Soluzione. Dal Lemma 8.5 segue che il semiperimetro del quadrilatero è pari a 21. Ma dal Lemma 8.2 si ottiene che la somma di ciascuna coppia di lati opposti deve essere pari al semiperimetro, e cioè appunto a 21. Quindi $CD = 10$ e $DA = 14$. □

9. Quadrilateri ciclici e Teorema di Tolomeo

Un quadrilatero (e più in generale un poligono) si dice *ciclico* se può essere inscritto in una circonferenza.
Dal Teorema 3.7 discende il seguente:

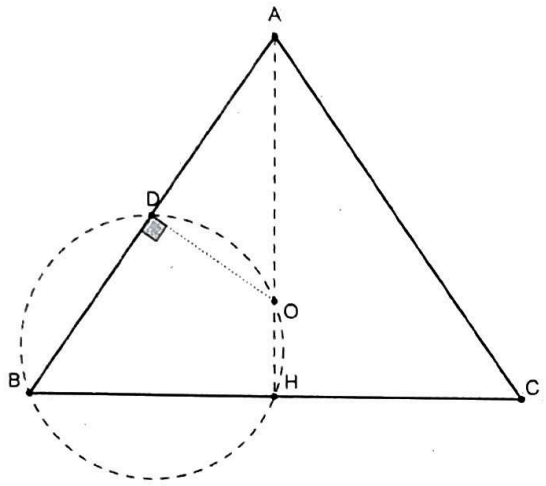
Teorema 9.1. *Un quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari.*

Si ricordi che per dimostrare l'inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza è possibile anche utilizzare il Lemma 3.8. Altri criteri saranno presentati in seguito.

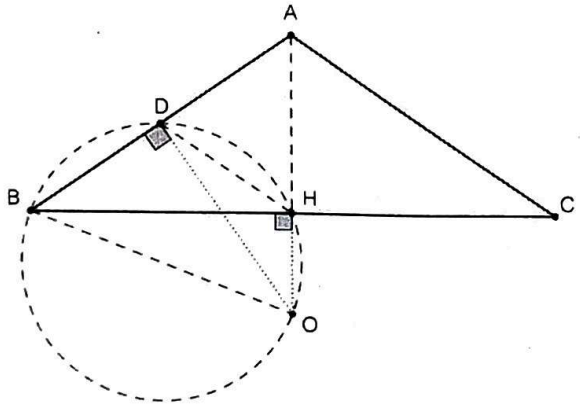
Lemma 9.2. Un rettangolo o un trapezio isoscele sono sempre inscrivibili in una circonferenza. Un rombo (a meno che non sia un quadrato), un parallelogramma (a meno che non sia un rettangolo), un trapezio scaleno, non sono mai inscrivibili in una circonferenza.

Esempio 9.1. * Sia O il circocentro di un triangolo isoscele ABC di base BC. Indicato con H il piede dell'altezza relativa a BC e con D il punto medio di AB, dimostrare che il quadrilatero $BDOH$ è ciclico.

Soluzione. Ci sono due casi distinti da esaminare (più il caso limite): triangolo ABC acutangolo, e triangolo ABC ottusangolo. Iniziamo dal primo caso, nel quale il circocentro O è interno al triangolo (Lemma 5.8).



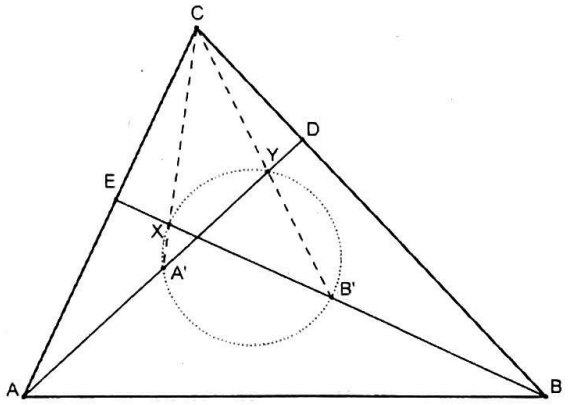
L'angolo $\widehat{OHB}$ è retto per costruzione: H infatti è piede dell'altezza. Dunque il quadrilatero sarà ciclico se l'angolo opposto a $\widehat{OHB}$ è suo supplementare, cioè anch'esso retto. O è il circocentro, e D è il punto medio di AB; quindi DO è necessariamente un asse, ed è perpendicolare al lato AB. Perciò anche l'angolo $\widehat{BDO}$ è retto, e il quadrilatero $BDOH$ è ciclico per il Teorema 9.1.
Nel secondo caso il circocentro O cade esternamente al triangolo, sul prolungamento dell'altezza AH.



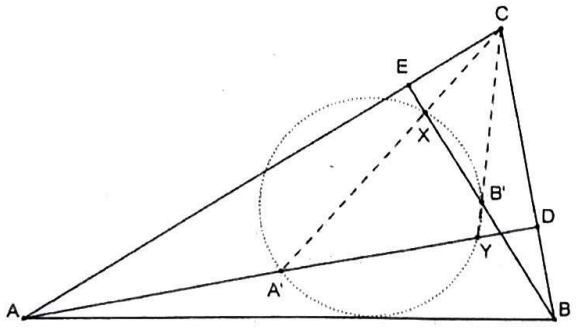
Per quanto dimostrato in precedenza, sia l'angolo $\widehat{OHB}$ sia l'angolo $\widehat{ODB}$ sono retti: quindi essi vedono il segmento BO sotto lo stesso angolo, il che è sufficiente per concludere che B, O, H e D sono conciclici (Lemma 3.8). Il segmento BO, essendo sotteso da angoli retti, è il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero (Lemma 3.9).
Resta a questo punto da esaminare il caso in cui ABC sia rettangolo in A, quando cioè il punto H coincide con O. Ma il caso è banale perché i punti da considerare sono solo tre: D, B e $H = O$; e tre punti non allineati individuano sempre una e una sola circonferenza. □

Esempio 9.2. ** (*Olimpiadi della matematica, gara provinciale 2011*)
Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E i piedi delle altezze uscenti da A, B. Siano A' il punto medio di AD, B' il punto medio di BE. CA' interseca BE in X, CB' interseca AD in Y. Dimostrare che esiste una circonferenza passante per A', B', X e Y.

Soluzione. Il testo non parla di quadrilatero ciclico perché i punti, a seconda dei casi, possono presentarsi in ordine diverso. Nel primo caso, i punti X e Y si trovano dalla stessa parte rispetto ad A' e B'.



I triangoli ADC e BCE sono simili per il Primo criterio di similitudine (Teorema 4.3): hanno infatti ambedue un angolo retto (si ricordi che AD e BE sono altezze), e l'angolo $\widehat{ACB}$ in comune. Ne segue, in particolare, che $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ e che $AC : BC = AD : BE$; ma, ricordando che $AD = 2AA'$ e $BE = 2BB'$, vale la proporzione $AC : BC = AA' : BB'$. Pertanto i triangoli CAA' e $B'BC$ sono anch'essi simili, per il secondo criterio (Teorema 4.4). In particolare risultano congruenti gli angoli $\widehat{AA'C}$ e $\widehat{BB'C}$. L'angolo $\widehat{CA'Y}$ è supplementare di $\widehat{AA'C}$; l'angolo $\widehat{CB'X}$ è supplementare di $\widehat{BB'C}$; essi sono dunque congruenti in quanto supplementari di angoli congruenti: $\widehat{CA'Y} = \widehat{CB'X}$. I punti A' e B', infine, vedono il segmento XY sotto il medesimo angolo, quindi A', B', X e Y sono conciclici (Lemma 3.8).

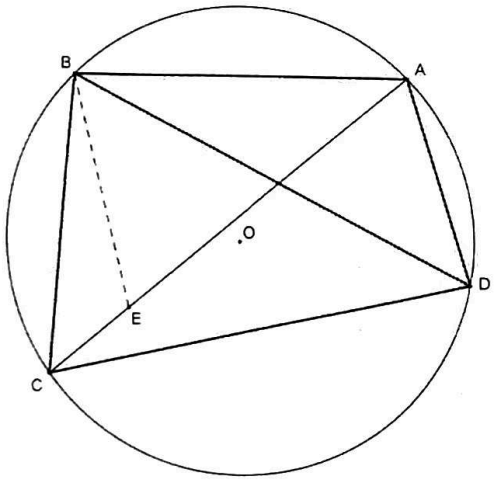


Nel secondo caso si proceda allo stesso modo: 1) i triangoli ADC e BCE sono simili; 2) i triangoli CAA' e $B'BC$ sono anch'essi simili; 3) $\widehat{CA'Y} = \widehat{CB'X}$. Ma $\widehat{XB'Y}$ è supplementare di $\widehat{CB'X}$ per costruzione, perciò è a sua volta supplementare di $\widehat{CA'Y}$. Il quadrilatero $A'YB'X$ ha due angoli opposti supplementari, e quindi, per il Teorema 9.1, è inscrivibile in una circonferenza. □

Fra i teoremi di geometria euclidea non scolastica il più utile e frequente per le gare di livello base e intermedio (individuali o a squadre) è il Teorema di Tolomeo[1].

Teorema 9.3. *(Teorema di Tolomeo[2]) In un quadrilatero ciclico[3] $ABCD$ la somma dei prodotti delle due coppie di lati opposti è congruente al prodotto delle diagonali. In simboli: $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.*

Esempio 9.3. * Dimostrare il Teorema di Tolomeo.



Soluzione. In un quadrilatero ciclico $ABCD$, si costruisca sulla diagonale AC il punto E in modo che sia $\widehat{AEB} = \widehat{BCD}$. Ne consegue che i triangoli AEB e BDC sono simili, e dunque $AE : CD = AB : BD$. Ma anche i triangoli BEC e ADB sono simili, da cui $EC : AD = BC : BD$. Dalle due proporzioni appena ricavate si ottiene: $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ e $EC \cdot BD = AD \cdot BC$. Sommando termine a termine le ultime due uguaglianze si ha: $AE \cdot BD + EC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$;

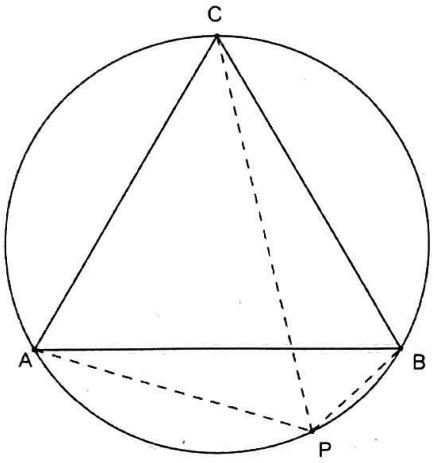
[1] Claudio Tolomeo di Alessandria, astronomo, geografo e matematico greco (ca. 100-175 d.C.); il teorema compare nel primo libro della sua opera più famosa, l'*Almagesto*.

[2] Il teorema può essere utilizzato anche come criterio per dimostrare la ciclicità di un quadrilatero.

[3] Si veda oltre, Teorema 13.3, per il caso generale riguardante un quadrilatero qualunque.

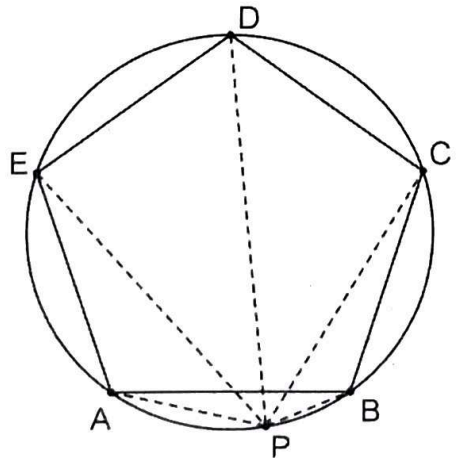
raccogliendo BD: $BD \cdot (AE + EC) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, e quindi essendo $AE + EC = AC$, risulta $BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, che è quanto si doveva dimostrare. □

Esempio 9.4. Dato un triangolo equilatero ABC, sia P un punto della circonferenza a esso circoscritta appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP = CP$.



Soluzione. Si applichi il Teorema di Tolomeo (Teorema 9.3): $AB \cdot CP = AP \cdot BC + BP \cdot AC$. Detto l il lato del triangolo equilatero ABC, la relazione si può riscrivere: $l \cdot CP = AP \cdot l + BP \cdot l$. Semplificando l si ottiene la tesi. □

Esempio 9.5. * (*Stage di Cortona, 1994*)
Sia $ABCDE$ un pentagono regolare. Sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP + DP = CP + EP$.



Soluzione. Il problema si risolve tramite un'applicazione ripetuta del Teorema di Tolomeo (Teorema 9.3). I quadrilateri $APBE$, $APBC$ e $APBD$, infatti, sono tutti ciclici, quindi a ciascuno di essi possiamo applicare il teorema. Sia d la lunghezza delle diagonali del pentagono e l quella dei lati. In $APBE$: $AP \cdot d + PB \cdot l = PE \cdot l$; in $APBC$: $AP \cdot l + PB \cdot d = PC \cdot l$. Sommando termine a termine: $AP \cdot d + PB \cdot l + AP \cdot l + PB \cdot d = PE \cdot l + PC \cdot l$ (1). Ancora applicando Tolomeo, questa volta in $APBD$: $AP \cdot d + PB \cdot d = PD \cdot l$; si sottragga quest'ultima relazione dalla (1): $PD \cdot l + PB \cdot l + AP \cdot l = PE \cdot l + PC \cdot l$. A questo punto, semplificando l, si ottiene la tesi. □

Lemma 9.4. L'area di un quadrilatero ciclico avente lati di lunghezza a, b, c e d può essere calcolata con la *Formula di Brahmagupta*[4]:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,,$$

dove p è il semiperimetro del quadrilatero.

Lemma 9.5. Un quadrilatero avente le diagonali perpendicolari può essere inscritto in un rettangolo, avente lati paralleli e congruenti alle diagonali del quadrilatero. L'area del quadrilatero è pari alla metà dell'area del rettangolo a esso circoscritto. Pertanto, dette d_1 e d_2 le diagonali, l'area si calcola: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. La formula è un caso particolare di una proprietà più generale, che sarà trattata più avanti, nel capitolo dedicato alla trigonometria (Teorema 12.2).

Il rombo è un quadrilatero con diagonali perpendicolari e contemporaneamente un parallelogramma. L'area del rombo si può quindi trovare con la formula appena indicata.

Esempio 9.6. Un quadrilatero ciclico ha tre lati consecutivi di misura 7, 15 e 24 e ha le diagonali tra loro perpendicolari. Quanto misura il quarto lato?[5]

Soluzione. Sia x il lato cercato. Per usare la Formula di Brahmagupta (Lemma 9.4) si inizi a calcolare il semiperimetro:

$$p = \frac{7+15+24+x}{2} = \frac{46+x}{2} = 23 + \frac{x}{2}\,;$$

si avrà quindi che

$$\mathcal{A} = \sqrt{\left(16+\frac{x}{2}\right)\left(8+\frac{x}{2}\right)\left(-1+\frac{x}{2}\right)\left(23-\frac{x}{2}\right)} =$$

[4] Brahmagupta (598-668), matematico indiano.

[5] Per questo problema (come d'altra parte per molte altre cose) sono in debito con Sandro Campigotto.

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(32+x)(16+x)(x-2)(46-x)}\,.$$

Si proceda ora a calcolare l'area tramite le diagonali: essendo le diagonali d_1 e d_2 perpendicolari, l'area è pari a $\mathcal{A} = (d_1 \cdot d_2)/2$ (Lemma 9.5). Ma, utilizzando il Teorema di Tolomeo (Teorema 9.3), l'area può essere espressa come

$$\frac{1}{2}(7 \cdot 24 + 15 \cdot x) = 84 + \frac{15x}{2}\,.$$

Si eguaglino a questo punto le due espressioni trovate per calcolare l'area del quadrilatero:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(32+x)(16+x)(x-2)(46-x)} = 84 + \frac{15x}{2}\,,$$
$$(32+x)(16+x)(x-2)(46-x) = (4 \cdot 84 + 2 \cdot 15x)^2\,.$$

Tramite conti noiosi ma elementari si ricava l'equazione biquadratica

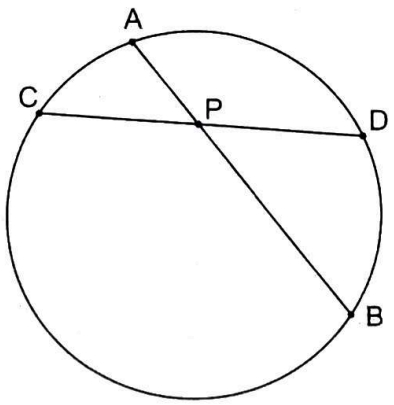
$$x^4 - 800x^2 + 160000 = 0\,,$$

da cui $x^2 = 400$, e infine $x = 20$. □

10. Teoremi sulle corde, le tangenti e le secanti

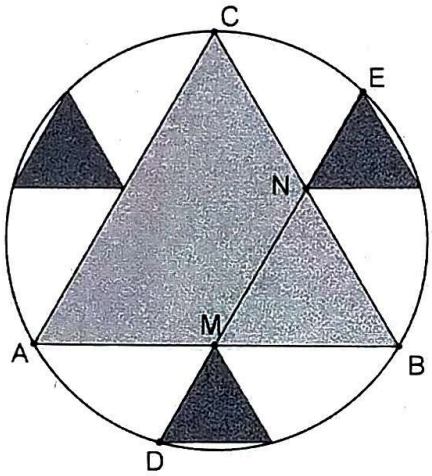
In questo capitolo saranno esaminati tre noti teoremi, strettamente connessi fra loro. Tali teoremi, in effetti, non sono che casi particolari di una teoria più generale, che non sarà illustrata in questo testo in quanto argomento non elementare[1].

Teorema 10.1. *(Teorema delle corde) In una circonferenza si traccino le corde AB e CD secanti in P. Vale allora la proporzione: $PA : PC = PD : PB$. Sussiste anche il teorema inverso: se vale la proporzione, allora A, C, B e D sono conciclici.*



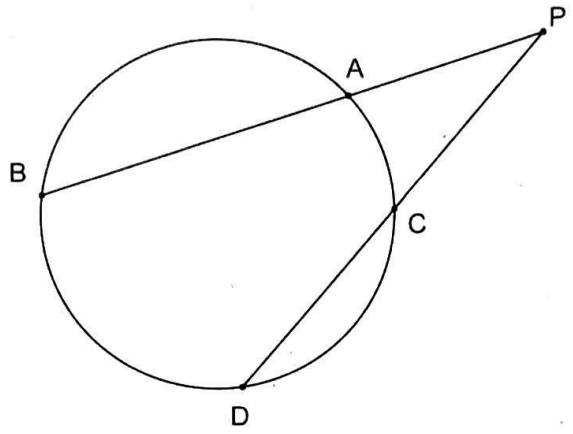
[1] La dimostrazione di ciascuno dei tre teoremi, che segue da semplici considerazioni sulla similitudine di triangoli, può essere trovata in un qualsiasi testo di geometria per la scuola superiore.

Esempio 10.1. (*Gara a squadre on line, febbraio 2012*)
La pista di atterraggio è di forma circolare con raggio $R = 1000\sqrt{3}$. All'interno è evidenziata in grigio chiaro la zona racchiusa da un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Le zone libere per l'atterraggio sono indicate in grigio scuro e sono racchiuse da triangoli equilateri con un vertice nel punto medio di un lato del triangolo chiaro e gli altri due sull'arco di circonferenza più piccolo individuato da tale lato. Dopo avere scritto il lato di uno dei triangoli scuri nella forma $m + n\sqrt{5}$ calcolare $n - m$.



Soluzione. Si richiede di trovare il lati di uno dei triangoli più scuri. Sia dunque x il lato incognito. Il segmento AB, lato del triangolo ABC, vale 3000 (Lemma 8.4); ma M è punto medio di AB, quindi $AM = MB = 1500$. Sia ora, per comodità di notazione, $AM = MB = 1500 = a$. Per il Teorema delle corde (Teorema 10.1) vale che $DM : AM = MB : ME$; ora, $ME = MN + NE$, dove $MN = a$ (Teorema 4.6) e $NE = x$. Perciò $x : a = a : (x + a)$, da cui si deduce $x^2 + ax - a^2 = 0$. L'unica soluzione positiva è $x = -(a/2) + (a\sqrt{5})/2$, corrispondente a $-750 + 750\sqrt{5}$. Pertanto $m = -750$ e $n = 750$, e la soluzione richiesta è $n - m = 750 - (-750) = 1500$. □

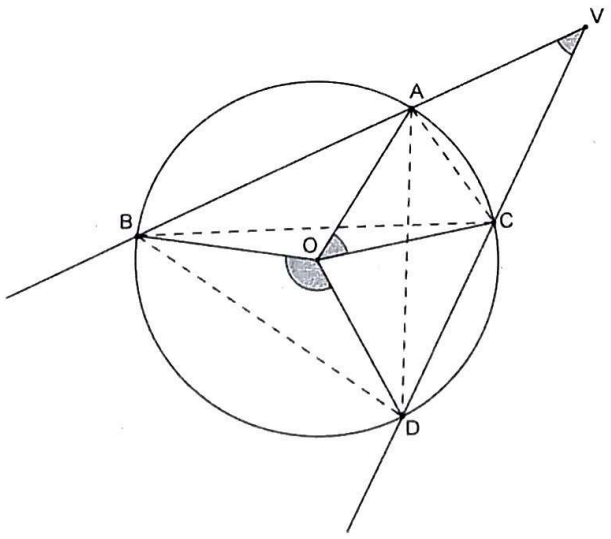
Teorema 10.2. *(Teorema delle secanti) Si considerino due secanti a una circonferenza uscenti entrambe da un punto P esterno alla circonferenza. La prima secante incontra la circonferenza in A e in B (A più vicino a P), la seconda in C e in D (C più vicino a P). Vale allora la proporzione $PA : PC = PD : PB$. Vale anche il teorema inverso: se 4 punti A, B, C e D rispettano la proporzione $PA : PC = PD : PB$ rispetto a un certo punto P, allora A, B, D e C sono conciclici.*



Quindi, riepilogando, i criteri per stabilire la ciclicità di un quadrilatero sono: Lemma 3.8, Teorema 9.1, Teorema 9.3, Teoremi 10.1 e 10.2.

Esempio 10.2. * (*Quaestio Copernicana, marzo 2009*)[2]
Da un punto esterno a una circonferenza si conducano due secanti; esse formano con la circonferenza due corde qualsiasi. Dimostrare che l'angolo fra le due secanti è congruente alla semidifferenza fra i due angoli al centro che sottendono i due archi interni alle secanti.

Soluzione. Si applichi il Teorema delle secanti (Teorema 10.2): ne risulta, con la notazione adottata nella figura, che $VB : VD = VC : VA$.



[2]Viene qui riproposto l'Esempio 3.5, con una soluzione alternativa.

Pertanto i triangoli VAC e VBD sono simili, avendo l'angolo $\widehat{V}$ in comune e due lati in proporzione (II criterio, Teorema 4.4); in particolare $\widehat{ABD} = \widehat{VCA}$. Ma per la proprietà dell'angolo al centro (Teorema 3.7) $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD}$; quindi, in base alla similitudine appena dimostrata $\widehat{AOD} = 2\widehat{VCA}$. Per lo stesso ragionamento $\widehat{COB} = 2\widehat{VAC}$. Si proceda ora sottraendo $\widehat{COB}$ da $\widehat{AOD_2}$ (con $\widehat{AOD_2}$ s'intende l'angolo maggiore di 180°, cioè quello che insiste sull'arco ABD):

$$\widehat{AOD_2} - \widehat{COB} = (\widehat{AOB} + \widehat{BOD}) - (\widehat{AOC} + \widehat{AOB}) = \widehat{BOD} - \widehat{AOC}\,.$$

Quest'ultima è proprio la differenza cercata, che si vuole dimostrare essere doppia di $\widehat{AVC}$. Dunque:

$$\widehat{BOD} - \widehat{AOC} = \widehat{AOD_2} - \widehat{COB} =$$

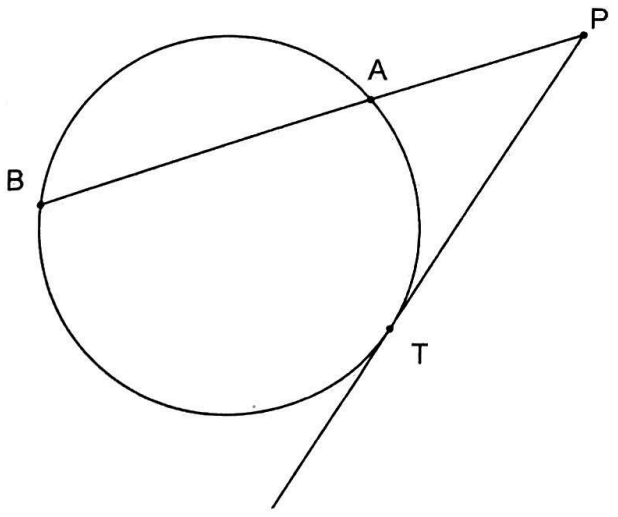
$$= 360° - \widehat{AOD} - 2\widehat{VAC} = 360° - 2\widehat{VCA} - 2\widehat{VAC} =$$

$$= 360° - 2(\widehat{VCA} + \widehat{VAC}) = 360° - 2(180° - \widehat{AVC}) =$$

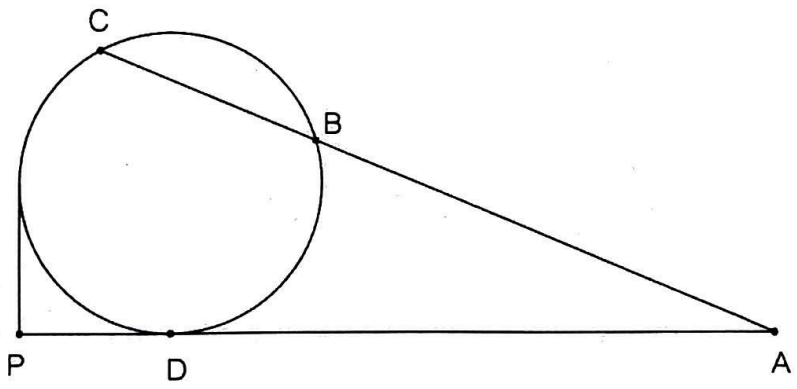
$$= 360° - 360° + 2\widehat{AVC} = 2\widehat{AVC}\,;$$

e con ciò la dimostrazione è terminata. □

Teorema 10.3. *(Teorema della tangente e della secante) Si considerino una secante e una tangente a una circonferenza uscenti entrambe da un punto P esterno alla circonferenza. La secante incontra la circonferenza in A e in B (A più vicino a P); la tangente incontra la circonferenza nel punto di tangenza T. Vale allora la proporzione $PA : PT = PT : PB$, cioè PT è medio proporzionale fra PA e PB.*



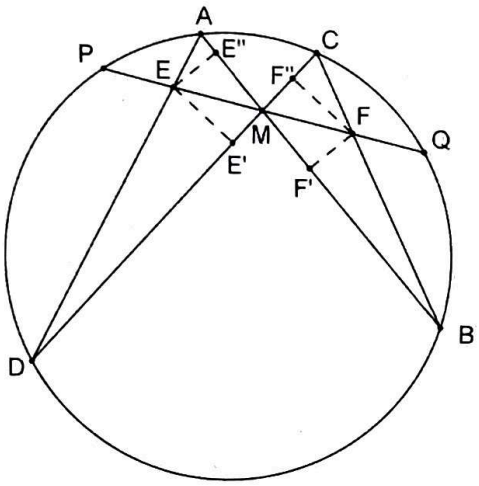
Esempio 10.3. *[3] (*Gara a squadre stage di Campobasso, febbraio 2012*)
Il tiro triangolare dei gemelli Derrick consiste in questo: uno dei due gemelli salta sul palo della porta avversaria, l'altro tira il pallone in linea retta sopra la porta e il primo spicca un balzo dal palo intercettando il tiro e passandolo di testa all'altro, che tira in porta. Affinché questa tecnica riesca, vi sono delle precise condizioni: presa la circonferenza tangente al palo, alto 2 metri, nel suo punto più alto e al suolo, il tiro rettilineo del secondo gemello la incontra in due punti, che vanno entrambi bene per il tiro triangolare solo se formano un lato del triangolo equilatero inscritto in quella circonferenza. Sapendo che il secondo gemello calcia da 10 metri di distanza dalla porta, si trovi la parte intera del quadrato della somma delle distanze dei due punti favorevoli dal punto in cui parte il tiro.



Soluzione. Facendo riferimento alla figura si osservi, per iniziare, che il raggio della circonferenza vale 2; e che $PA = 10$ e quindi $DA = 8$. Il testo chiede di calcolare la parte intera di $(AB + AC)^2$. Applicando il Teorema della tangente e della secante (Teorema 10.3) si ottiene che $AB \cdot AC = AD^2 = 64$. Ma uno dei dati del problema è che BC è il lato del triangolo equilatero inscritto: dal momento che il raggio è 2, $BC = AC - AB = 2\sqrt{3}$ (si veda a questo proposito il Lemma 8.4). Pertanto si risolve un sistema fra le equazioni $AB \cdot AC = 64$ e $AC - AB = 2\sqrt{3}$. Le soluzioni sono: $AB = \sqrt{67} - \sqrt{3}$ e $AC = \sqrt{67} + \sqrt{3}$. La somma delle due distanze è $2\sqrt{67}$, e il suo quadrato vale $4 \cdot 67 = 268$. □

[3] A questo problema viene assegnato un asterisco non perché presenti particolari difficoltà, ma perché il testo è lungo e intricato, e pertanto difficile da interpretare, specialmente durante una gara.

Esempio 10.4. *** (*Teorema della farfalla*[4])
Data una corda PQ in una circonferenza, sia M il suo punto medio. Si prendano altre due corde AB e CD passanti per M. Siano E ed F, rispettivamente, i punti in cui AD e BC intersecano PQ. Dimostrare che M è il punto medio del segmento EF.



Soluzione.[5] Si inizi col disegnare le proiezioni E' ed E'' di E su CD e AB, rispettivamente; e le proiezioni F' ed F'' di F su AB e CD. I triangoli MEE'' e MFF' sono simili (I criterio, Teorema 4.3) perché hanno ambedue un angolo retto ($\widehat{EE''M} = \widehat{MF'F} = 90°$) e i due angoli in M sono opposti al vertice; ne consegue che $EM : MF = EE'' : FF'$. I triangoli MEE' e MFF'' sono simili, secondo un analogo ragionamento; pertanto $EM : MF = EE' : FF''$. I triangoli AEE'' e CFF'' sono simili per il medesimo criterio, in quanto ambedue sono rettangoli e hanno angoli $\widehat{DCB}$ e $\widehat{DAB}$ congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (Teorema 3.7); si deduce che $EE'' : FF'' = AE : CF$. Infine sono simili i triangoli DEE' e BFF', per lo stesso ragionamento rispetto al caso immediatamente precedente; vale dunque che $EE' : FF' = DE : FB$. Ora è possibile manipolare i risultati ottenuti: dalle prime due proporzioni,

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{EE''}{FF'} \cdot \frac{EE'}{FF''};$$

[4]Si ritiene che il Teorema della farfalla sia stato pubblicato per la prima volta nel 1815. Si veda a tale proposito Coxeter, Greitzer 1967, pagg. 45-46.

[5]Esistono moltissime dimostrazioni di questo teorema, quasi tutte facilmente reperibili in rete. Quella qui riportata, che è presentata anche su Wikipedia, è la dimostrazione di Coxeter, Greitzer 1967, pag. 45.

Al secondo membro, sfruttando la terza e la quarta similitudine, si ottiene che:

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{AE}{CF} \cdot \frac{DE}{FB} = \frac{AE \cdot DE}{CF \cdot FB};$$

Si applica adesso il Teorema delle corde (Teorema 10.1) alle corde secanti AD e PQ: ne risulta che $AE \cdot DE = PE \cdot EQ$; si ripeta l'applicazione del medesimo Teorema alle corde secanti PQ e CB: segue che $CF \cdot FB = PF \cdot FQ$. Pertanto vale la relazione

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{PE \cdot EQ}{PF \cdot FQ};$$

ciascuno dei quattro segmenti al secondo termine va ora espresso come somma o come sottrazione di segmenti:

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{(PM - EM) \cdot (MQ + EM)}{(PM + MF) \cdot (MQ - MF)}.$$

Ricordando che M è il punto medio di PQ, $PM = MQ$, quindi;

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{(PM - EM) \cdot (PM + EM)}{(PM + MF) \cdot (PM - MF)} = \frac{PM^2 - EM^2}{PM^2 - MF^2}.$$

Si svolga ora l'ultima uguaglianza trovata:

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{PM^2 - EM^2}{PM^2 - MF^2},$$

ottenendo

$$EM^2(PM^2 - MF^2) = MF^2(PM^2 - EM^2),$$

da cui

$$EM^2 \cdot PM^2 - EM^2 \cdot MF^2 = MF^2 \cdot PM^2 - MF^2 \cdot EM^2,$$

dove, semplificando gli addendi uguali e dividendo per PM^2, si ricava $EM^2 = MF^2$, cioè $EM = MF$, che è quanto si doveva dimostrare. □

11. Geometria analitica

Prima di iniziare questo capitolo, desidero citare il parere di un importante matematico sulla geometria analitica. L'autore, David Ruelle[1], illustra le possibili tecniche per affrontare un problema: "Usare la forza bruta. Infatti (...) nei problemi di geometria elementare è sempre possibile introdurre nuove coordinate, scrivere delle equazioni che descrivano le rette presenti e ridurre il problema alla verifica di qualche passaggio algebrico. Questo metodo, elaborato da Descartes[2], è efficace, ma farraginoso. In genere è lungo e poco elegante, e alcuni matematici sostengono che non ci insegna niente: non si raggiunge una reale comprensione del problema che si è risolto"[3].

D'altra parte, sull'utilità della geometria analitica, questa è l'opinione di Eric Temple Bell[4]: "though the idea behind it all is childishly simple, yet the method of analytic geometry is so powerful that very ordinary boys of seventeen can use it to prove results which would have baffled the greatest of the Greek geometers - Euclid, Archimedes and Apollonius[5]."

---

[1] David Ruelle (1935), matematico e fisico belga. Tra i vari riconoscimenti, ha vinto la medaglia Boltzmann nel 1986.

[2] René Descartes (1596-1650), o Cartesio, matematico e filosofo francese.

[3] Ruelle 2009, pag. 41.

[4] Eric Temple Bell (1883-1960), matematico scozzese.

[5] "Benché l'idea che sta sotto a tutto ciò sia infantilmente semplice, il metodo della geometria analitica è così potente che ordinari ragazzi di diciassette anni possono usarlo per dimostrare risultati che avrebbero confuso i più grandi fra i matematici greci - Euclide, Archimede e Apollonio"

Per la parte teorica di geometria analitica si rimanda a qualsiasi testo scolastico. Questo capitolo, pertanto, non contiene teoremi e lemmi ma è costituito esclusivamente da una serie di esercizi.

Esempio 11.1. * (*Compitone Copernico Udine, 2012*)[6]
Un segmento di lunghezza unitaria è situato nel primo quadrante del piano cartesiano e i suoi estremi giacciono, rispettivamente, sui semiassi x e y. Determinare il luogo dei punti medi del segmento al variare della sua posizione.

Soluzione. Sia $A = (x, 0)$ l'estremo del segmento che giace sull'asse delle ascisse. Ovviamente varrà la condizione $0 \leq x \leq 1$. Detto B l'altro estremo del segmento, esso dovrà appartenere all'asse delle ordinate, e avrà pertanto coordinate $(0, y)$, sempre con la condizione $0 \leq y \leq 1$. Dovendo però essere $AB = 1$, dev'essere verificata anche la condizione $\sqrt{(x-0)^2 + (0-y)^2} = 1$. Innalzando al quadrato la relazione appena trovata, si ha $x^2 + y^2 = 1$. Tenendo conto del fatto che l'ordinata di B dev'essere non negativa, si ottiene dunque: $A = (x, 0)$ e $B = (0, \sqrt{1-x^2})$. Il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento si troverà con le note formule:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Nel caso presente il risultato è

$$M = (x_M, y_M) = \left(\frac{x}{2}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \right).$$

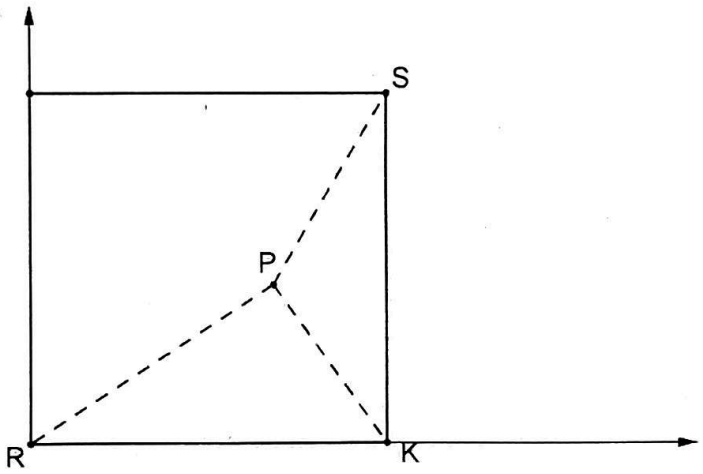
Per individuare il luogo geometrico cercato si elimini la variabile x mettendo in evidenza $x = 2x_M$ e sostituendo nell'equazione per y_M; dopo facili passaggi si ottiene: $y_M = \frac{\sqrt{1-4x_M^2}}{2}$, e infine $x_M^2 + y_M^2 = 1/4$, che rappresenta appunto una circonferenza di centro l'origine e raggio $1/2$. Essendo il segmento vincolato nel primo quadrante, la soluzione è l'arco di circonferenza con $x \geq 0$ e $y \geq 0$. □

Esempio 11.2. * (*Gara a squadre on line, novembre 2010*)
Rico, Kowalsky e Soldato si trovano su tre vertici consecutivi della loro gabbia quadrata, mentre Skipper è rimasto in un punto all'interno della gabbia. Se Skipper si trova a 3 metri da soldato, a 5 metri da Rico ed esattamente a $2\sqrt{2}$ metri da Kowalsky, qual è la superficie della gabbia dei pinguini?

(Temple Bell 1953, pag. 5).

[6] Viene qui riproposto l'Esempio 5.3, con una soluzione alternativa.

Soluzione. Il problema può essere anche risolto in geometria sintetica (si veda Campigotto 2013, pag. 143), ma in questo caso la geometria analitica offre uno strumento piuttosto efficace, anche se un po' laborioso. Si consideri la gabbia quadrata di lato l avente un vertice nell'origine e due lati sugli assi cartesiani. Sia R il vertice dell'origine dove si trova Rico, K il vertice di coordinate $(l, 0)$ in cui si trova Kowalsky, S il vertice di coordinate (l, l) in cui si trova Soldato. Skipper è invece in un punto interno P, tale che $PR = 5$, $PK = 2\sqrt{2}$ e $PS = 3$.



Il punto P appartiene alla circonferenza di centro R e raggio 5, ma anche alla circonferenza di centro $K = (l, 0)$ e raggio $2\sqrt{2}$. Si intersechino dunque le due circonferenze, aventi equazioni rispettivamente:

$$x^2 + y^2 = 25\,,$$
$$(x - l)^2 + y^2 = 8\,.$$

Mettendo in evidenza y^2 nella prima equazione e sostituendo nella seconda si ricava:

$$x = \frac{l}{2} + \frac{17}{2l}\,.$$

Di nuovo dalla prima equazione, noto che $y = \sqrt{25 - x^2}$, dove si prende la radice positiva perché P giace nel primo quadrante, si ottiene

$$y = \sqrt{\frac{33}{2} - \frac{l^2}{4} - \frac{289}{4l^2}}\,.$$

Le ultime due equazioni trovate rappresentano le coordinate del punto P. Si usi a questo punto l'ultimo dato a disposizione, e cioè che $PS = 3$:

$$\left(l - \frac{l}{2} - \frac{17}{2l}\right)^2 + \left(l - \sqrt{\frac{33}{2} - \frac{l^2}{4} - \frac{289}{4l^2}}\right)^2 = 9\,.$$

Svolgendo i quadrati e riordinando i termini, dopo alcune somme e semplificazioni si ottiene che

$$l^2 - 1 = 2l\sqrt{\frac{33}{2} - \frac{l^2}{4} - \frac{289}{4l^2}};$$

si innalzi ora al quadrato per eliminare la radice:

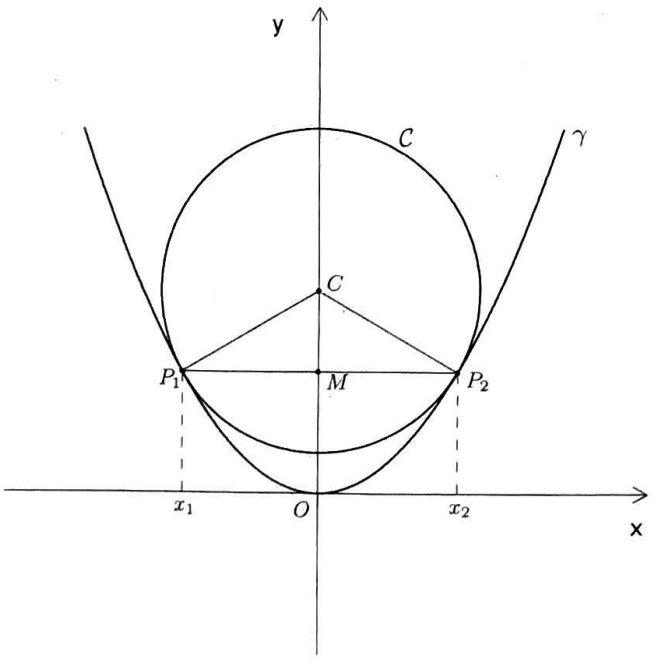
$$l^4 - 2l^2 + 1 = 66l^2 - l^4 - 289\,,$$

da cui

$$l^4 - 34l^2 + 145 = 0\,.$$

Si ricordi che il problema chiede l'area l^2 del quadrato, quindi l'ultima equazione biquadratica può essere risolta in l^2; i due valori sono $l^2 = 5$ e $l^2 = 29$. Il primo evidentemente non è accettabile, pertanto la risposta è 29. □

Esempio 11.3. * (*Compitone Copernico Udine, 2011*)
Si considerino le circonferenze interne alla parabola $y = ax^2$, tangenti internamente ad essa. Si prendano le circonferenze tangenti alla parabola in due punti distinti: si dimostri che l'altezza del triangolo che ha per vertici i punti di tangenza e il centro della circonferenza inscritta è indipendente dalla particolare circonferenza considerata.



Soluzione. Dal momento che il centro della circonferenza, per motivi di simmetria, appartiene all'asse delle ordinate, l'equazione è $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + by + c = 0$. Il triangolo indicato dal quesito è isoscele e ha base parallela all'asse delle ascisse. Si cerchino

ora le intersezioni fra circonferenza e parabola risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ x^2 + y^2 + by + c = 0 \end{cases}$$

Si ricavi x^2 dalla seconda equazione e si sostituisca nella prima; si ottiene

$$ay^2 + (ab + 1)y + ac = 0\,,$$

in cui va imposta la condizione di tangenza, $\Delta = 0$. Il risultato è

$$(ab + 1)^2 - 4a^2c = 0 \quad \rightarrow \quad c = \frac{(ab + 1)^2}{4a^2}\,.$$

L'equazione della circonferenza è così divenuta

$$x^2 + y^2 + by + \frac{(ab + 1)^2}{4a^2} = 0\,.$$

In tale circonferenza il centro ha coordinate $C(0, -b/2)$. Si pongano ora nuovamente a sistema la parabola e la circonferenza per cercare i punti di tangenza, che saranno simmetrici rispetto all'asse delle ordinate; si noti che interessa soltanto l'ordinata y_M dei punti di tangenza, in quanto l'altezza del triangolo è data da $|y_M + b/2|$. Si affronta dunque il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ x^2 + y^2 + by + \dfrac{(ab + 1)^2}{4a^2} = 0 \end{cases}$$

dal quale, sempre sostituendo x^2 dalla seconda equazione nella prima, si ha l'equazione

$$ay^2 + (ab + 1)y + \frac{(ab + 1)^2}{4a} = 0\,.$$

Essendo stato imposto in precedenza $\Delta = 0$ si avranno due soluzioni coincidenti, che forniscono l'ascissa comune dei due punti di tangenza cercati:

$$y_M = -\frac{ab + 1}{2a}$$

L'altezza del triangolo è infine pari a

$$\left| y_M + \frac{b}{2} \right| = \left| -\frac{ab + 1}{2a} + \frac{b}{2} \right| = \left| -\frac{b}{2} - \frac{1}{2a} + \frac{b}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2a} \right|\,.$$

L'altezza dipende quindi solo dal parametro a della parabola ma, come richiesto, è indipendente dalla circonferenza considerata. □

Esempio 11.4. * (*Compitone Copernico Udine, 2008*)
Data una carica elettrica puntiforme q, il potenziale elettrostatico V da essa generato in un punto a distanza r è $V = k(q/r)$ (avente segno concorde a quello di q), dove k è una costante positiva. Si considerino due cariche q_1 e q_2 poste in un piano a distanza unitaria una dall'altra. Dopo avere opportunamente scelto su tale piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si individui il luogo dei punti del piano in cui il potenziale totale, somma dei potenziali generati da q_1 e da q_2, risulta nullo.

Soluzione. Siano dunque q_1 e q_2 due cariche non nulle e Oxy un riferimento cartesiano ortogonale in cui la carica q_1 è posta nell'origine O e la carica q_2 nel punto $A(1, 0)$. Il potenziale in un dato punto $P(x, y)$ è espresso da

$$V(P) = k\frac{q_1}{OP} + k\frac{q_2}{AP},$$

che in funzione delle coordinate di P può anche scriversi

$$V(x, y) = k\frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2}} + k\frac{q_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

Il luogo $\mathcal{C}$ dei punti in cui il potenziale è nullo soddisfa l'equazione cartesiana

$$k\frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2}} + k\frac{q_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 0,$$
$$q_1\sqrt{(x-1)^2+y^2} = -q_2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Affinché $\mathcal{C}$ sia non vuoto occorre quindi che q_1 e q_2 abbiano segno discorde. In tal caso, elevando al quadrato i membri della precedente uguaglianza e ricombinandone i termini questa può essere scritta nell'equivalente forma

$$\mathcal{C}: \ (\lambda-1)x^2 + (\lambda-1)y^2 - 2\lambda x + \lambda = 0,$$

ove si è posto $\lambda = (q_1/q_2)^2$. È quindi immediato riconoscere in $\mathcal{C}$ un fascio di circonferenze avente asse radicale[7] $x = 1/2$ (l'asse del segmento congiungente le due cariche, nonché la retta su cui degenera il luogo per $\lambda = 1$) e punti base $B_1(1/2, \sqrt{3}/2)$, $B_2(1/2, -\sqrt{3}/2)$. □

L'esempio appena proposto rientra nel caso più generale della costruzione della cosiddetta *circonferenza di Apollonio*[8]: si indica con questo nome il luogo dei punti

[7] Per la definizione di asse radicale e punti base di un fascio di circonferenze si può consultare un qualsiasi manuale scolastico.

[8] Apollonio di Perga (262-190 a.C.), matematico e astronomo greco.

tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissati sia costante; detti A e B i punti fissi, e $\mathcal{R}$ un numero positivo, i punti P che soddisfano la relazione

$$\frac{PA}{PB} = \mathcal{R}$$

formano la circonferenza di Apollonio. Se $\mathcal{R} = 1$ la condizione richiesta rappresenta l'asse del segmento AB.

Nell'Esempio 11.4 la relazione:

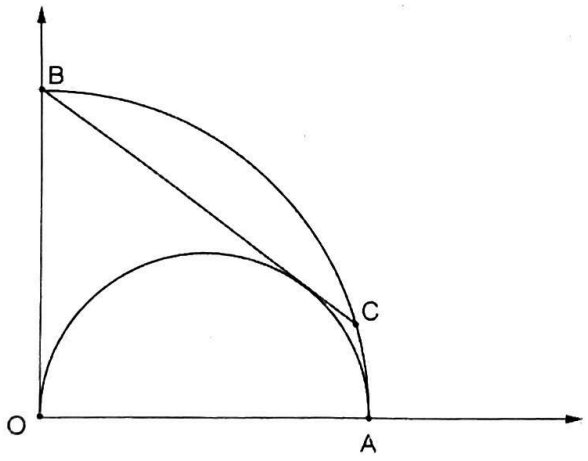
$$k\frac{q_1}{\overline{OP}} + k\frac{q_2}{\overline{AP}} = 0$$

equivale a

$$\frac{OP}{AP} = \mathcal{R},$$

dove $\mathcal{R}$ è positivo, dato che le cariche elettriche hanno segni discordi.

Esempio 11.5. * (*Gara a squadre on line, gennaio 2012*)
Lo schema d'attacco era stato ampiamente studiato. In attesa che Han disattivasse lo scudo di protezione, le forze ribelli avrebbero attaccato in sequenza i quattro *Star Destroyer* imperiali denominati O, A, C e B schierati come rappresentato in figura. AOB era il quadrante di una circonferenza di centro O e raggio 100 km. Costruita la semicirconferenza di diametro OA interna al quadrante, la posizione dell'astronave C sull'arco AB era data dalla tangente condotta da B, distinta da BO, alla semicirconferenza. Determina l'area del quadrilatero $OACB$.



Soluzione. Per comodità si ponga il raggio del quadrante pari a 1; la sua equazione è $x^2 + y^2 = 1$ con le condizioni $x \geq 0$ e $y \geq 0$. La semicirconferenza di diametro OA ha dunque equazione

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \qquad y \geq 0\,.$$

L'equazione $y = mx + 1$ rappresenta un fascio proprio di rette passanti per il punto $(0, 1)$. Si mettano a sistema la semicirconferenza e il fascio di rette per ottenere l'equazione

$$(1 + m^2)x^2 + (2m - a)x + 1 = 0\,.$$

Va ora imposta la condizione di tangenza, $\Delta = 0$, che fornisce l'equazione

$$(2m - 1)^2 - 4(1 + m^2) = 0\,.$$

Svolgendo i calcoli, si ricava $m = -\frac{3}{4}$. La retta così costruita va intersecata col quadrante $x^2 + y^2 = 1$, per ottenere le coordinate del punto C:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{4}x + 1 \\ \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si giunge infine all'equazione $25x^2 - 24x = 0$. La soluzione $x = 0$ rappresenta ovviamente il punto B, il punto C ha invece ascissa $x = \frac{24}{25}$, da cui l'ordinata $y = \frac{7}{25}$. L'area $\mathcal{A}$ richiesta si può ottenere sommando le aree del triangolo OAC (sulla base OA e avente per altezza l'ordinata di C) e del triangolo OCB (sulla base OB e avente per altezza l'ascissa di C):

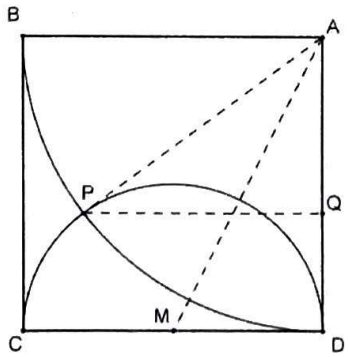
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{24}{25} = \frac{31}{50}\,.$$

Inizialmente la lunghezza era stata divisa per 100, pertanto è ora necessario moltiplicare l'area per 10000. Il risultato è 6200. □

12. Trigonometria

Alcuni problemi, anche impegnativi, possono essere affrontati con l'uso esclusivo delle relazioni fondamentali della trigonometria, oppure delle definizioni geometriche di seno, coseno e tangente come rapporti fra lati di un triangolo rettangolo; o tramite le formule trigonometriche[1].

Esempio 12.1. * (*American Mathematics Competition, 2003*)
Il quadrato $ABCD$ ha lato di lunghezza 4, ed M è il punto medio di CD. Una semicirconferenza di raggio 2 e centro M interseca un arco di circonferenza di centro A e raggio 4 nei punti D e P. Qual è la distanza di P dal lato AD?
a) 3; b) 16/5; c) 13/4; d) $2\sqrt{3}$; e) 7/2.



[1] Per la relativa teoria si consulti un qualsiasi manuale scolastico.

Soluzione. Si osservi che i triangoli AMD e APM sono congruenti[2]; hanno infatti il lato AM in comune, $AD = AP = 4$, $PM = MD = 2$. Pertanto vale l'uguaglianza $\widehat{MAP} = \widehat{DAM}$. Ma nel triangolo rettangolo PQA si può ricavare la lunghezza richiesta, PQ, in questo modo:

$$PQ = PA \sin \widehat{PAD} = 4 \sin(2\,\widehat{DAM}) .$$

Per la formula di duplicazione del seno:

$$\sin(2\,\widehat{DAM}) = 2 \sin \widehat{DAM} \cos \widehat{DAM} .$$

Nel triangolo DAM valgono le seguenti relazioni (teoremi sui triangoli rettangoli):

$$\sin \widehat{DAM} = \frac{MD}{AM} = \frac{2}{\sqrt{20}} ,$$
$$\cos \widehat{DAM} = \frac{AD}{AM} = \frac{4}{\sqrt{20}} ,$$

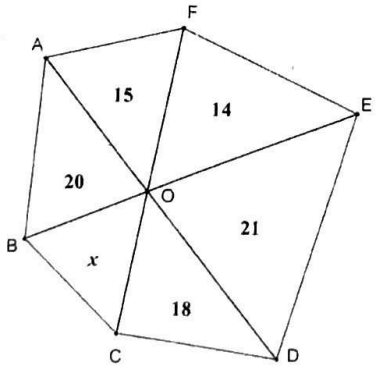
da cui

$$PQ = 4 \sin(2\widehat{DAM}) = 8 \sin \widehat{DAM} \cos \widehat{DAM} = 8 \frac{2}{\sqrt{20}} \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{16}{5} .$$

La risposta corretta è pertanto la *b*. □

Teorema 12.1. *L'area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto delle lunghezze di due lati moltiplicata per il seno dell'angolo fra essi compreso.*

Esempio 12.2. * (*Gara a squadre on line, ottobre 2010*)
Una sola parola era incisa sulla porta del tempio: Superficie. Subito sotto era riportata l'incisione di un esagono irregolare con le diagonali concorrenti[3]. Jones capì subito che la chiave della porta era l'area del triangolo indicato con x.



[2] Terzo criterio di congruenza.

[3] In figura le proporzioni fra le aree, volutamente, non sono rispettate.

Soluzione. Si osservi che i sei angoli in O sono a due a due congruenti perché opposti al vertice: si ponga allora $\alpha = \widehat{AOB} = \widehat{EOD}$, $\beta = \widehat{BOC} = \widehat{FOE}$, $\gamma = \widehat{COD} = \widehat{AOF}$. Le aree dei sei triangoli possono essere espresse, in base al Teorema 12.1, nel seguente modo:

$$\mathcal{A}(AOB) = 20 = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin\alpha \quad , \quad \mathcal{A}(BOC) = x = \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin\beta \, ,$$
$$\mathcal{A}(COD) = 18 = \frac{1}{2}OC \cdot OD \sin\gamma \quad , \quad \mathcal{A}(DOE) = 21 = \frac{1}{2}OD \cdot OE \sin\alpha \, ,$$
$$\mathcal{A}(EOF) = 14 = \frac{1}{2}OE \cdot OF \sin\beta \quad , \quad \mathcal{A}(FOA) = 15 = \frac{1}{2}OF \cdot OA \sin\gamma \, .$$

Si calcoli ora il valore della seguente espressione:

$$\frac{\mathcal{A}(AOB) \cdot \mathcal{A}(EOF) \cdot \mathcal{A}(COD)}{\mathcal{A}(DOE) \cdot \mathcal{A}(BOC) \cdot \mathcal{A}(FOA)} = \frac{20 \cdot 14 \cdot 18}{21 \cdot x \cdot 15} \, .$$

La stessa espressione, utilizzando le formule trigonometriche, può essere calcolata in questo modo:

$$\frac{\mathcal{A}(AOB) \cdot \mathcal{A}(EOF) \cdot \mathcal{A}(COD)}{\mathcal{A}(DOE) \cdot \mathcal{A}(BOC) \cdot \mathcal{A}(FOA)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}OE \cdot OF \sin\beta \cdot \frac{1}{2}OC \cdot OD \sin\gamma}{\frac{1}{2}OD \cdot OE \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin\beta \cdot \frac{1}{2}OF \cdot OA \sin\gamma} = 1 \, .$$

Pertanto

$$\frac{20 \cdot 14 \cdot 18}{21 \cdot x \cdot 15} = 1 \, .$$

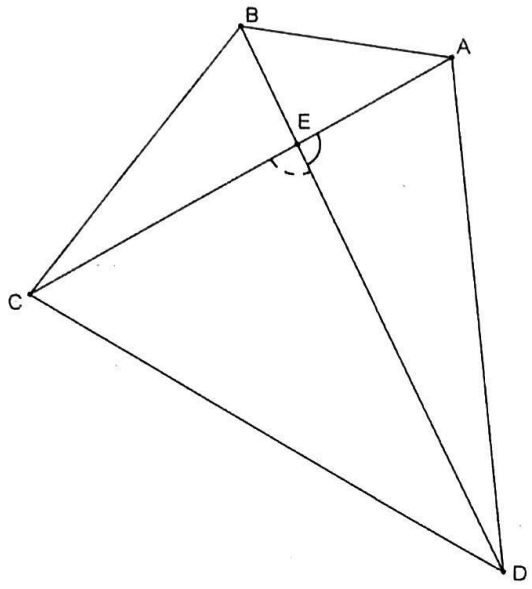
da cui

$$x = \frac{20 \cdot 14 \cdot 18}{21 \cdot 15} = 16 \, .$$

La risposta cercata è 16. □

Teorema 12.2. *L'area di un quadrilatero convesso equivale alla metà del prodotto delle sue diagonali moltiplicato per il seno di uno qualsiasi degli angoli da esse formati.*

Esempio 12.3. Dimostrare il Teorema 12.2.



Soluzione. Si calcoli l'area del quadrilatero come somma delle aree dei triangoli:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(EAB) + \mathcal{A}(EBC) + \mathcal{A}(ECD) + \mathcal{A}(EDA)\,.$$

Ciascuna area può essere calcolata tramite il Teorema 12.1:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}EA \cdot EB \sin\widehat{AEB} + \frac{1}{2}EB \cdot EC \sin\widehat{BEC} +$$

$$+\frac{1}{2}EC \cdot ED \sin\widehat{CED} + \frac{1}{2}ED \cdot EA \sin\widehat{DEA}\,.$$

Ma i seni dei quattro angoli considerati hanno tutti lo stesso valore dal momento che angoli supplementari hanno lo stesso seno. Pertanto:

$$\mathcal{A}(ABCD) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\widehat{AEB}\,(EA \cdot EB + EB \cdot EC + EC \cdot ED + ED \cdot EA) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\widehat{AEB}\,[EA(EB + ED) + EC(EB + ED)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\widehat{AEB}\,[(EA + EC)(EB + ED)] = \frac{1}{2}(AC \cdot BD)\sin\widehat{AEB}\,,$$

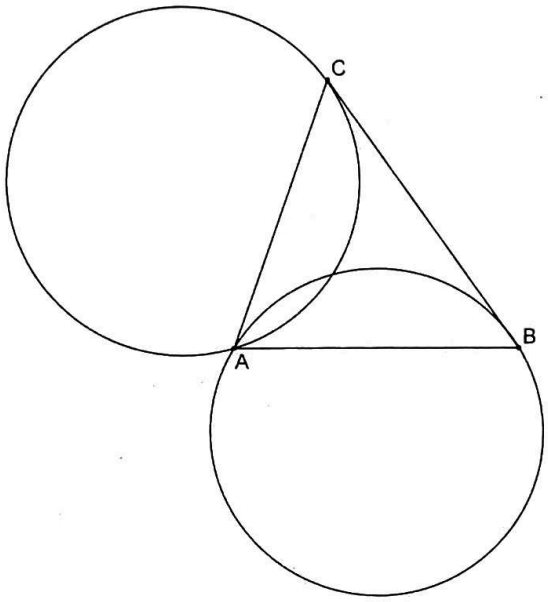
che è quanto si doveva dimostrare. □

Teorema 12.3. *(Teorema della corda) In un triangolo il rapporto fra ciascun lato e il seno dell'angolo opposto equivale al diametro della circonferenza circoscritta. Formulazione equivalente: il rapporto fra una corda di una circonferenza e il seno di un qualunque angolo alla circonferenza che sottende tale corda equivale al diametro della circonferenza circoscritta*[4].

[4]Si ricordi che angoli alla circonferenza che sottendono la stessa corda da parti opposte sono supplementari (Teorema 3.7), e che angoli supplementari hanno lo stesso valore del seno.

Il Teorema della corda offre un utile strumento per calcolare il raggio di una circonferenza circoscritta a un triangolo (si veda anche il Lemma 5.11).

Esempio 12.4. * (*Tratto da Coxeter, Greitzer 1967, 1.1, 4*)
In un triangolo ABC il raggio della circonferenza circoscritta vale R. Sia p il raggio di una circonferenza passante per A e tangente a BC in B, e q il raggio di una circonferenza passante per A e tangente a BC in C. Dimostrare che $pq = R^2$.



Soluzione. Nella circonferenza per A e per B (avente raggio p), dato che $\widehat{ABC}$ è un angolo alla circonferenza che sottende AB, per il Teorema 12.3 vale $AB = 2p \sin \widehat{ABC}$. Allo stesso modo nella circonferenza per A e per C (avente raggio q), dove $\widehat{ACB}$ è un angolo alla circonferenza che sottende AC, vale $AC = 2q \sin \widehat{ACB}$. Si osservi ora che, nella circonferenza circoscritta ad ABC, valgono, sempre per il Teorema 12.3, le relazioni: $AB = 2R \sin \widehat{ACB}$ e $AC = 2R \sin \widehat{ABC}$. Eguagliando le due relazioni ottenute per AB e le due per AC si ha:

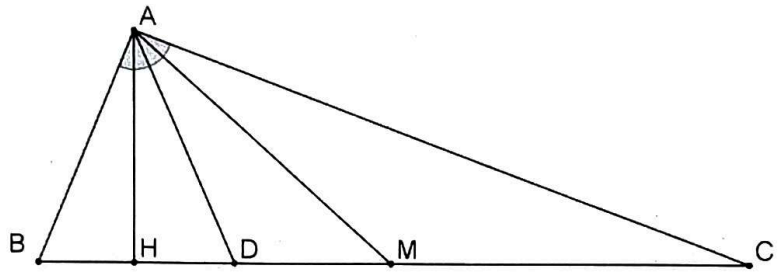
$$2p \sin \widehat{ABC} = 2R \sin \widehat{ACB} \quad , \quad 2q \sin \widehat{ACB} = 2R \sin \widehat{ABC} ;$$

moltiplicando membro a membro le due relazioni trovate e semplificando, si ricava infine che $pq = R^2$. □

Immediata conseguenza del Teorema 12.3 è il seguente:

Teorema 12.4. *(Teorema dei seni) In un triangolo qualunque è costante il rapporto fra ciascuno dei lati e il seno dell'angolo opposto.*

Esempio 12.5. ** (*Gara a squadre on line, novembre 2011*)
Alla fine della mia festa, proprio durante il taglio della torta, gli amici mi hanno riservato un enigma niente male. Ugo mi ha tagliato un pezzo di torta triangolare ABC in modo che l'altezza, la mediana e la bisettrice uscenti dal vertice A dividessero l'angolo $\hat{A}$ in quattro parti uguali. Qual era l'ampiezza, in primi, del maggiore tra gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ della mia fetta di torta?



Soluzione. Sia α il valore di uno dei quattro angoli congruenti in cui è diviso l'angolo $\widehat{CAB}$. Nel triangolo rettangolo ABH: $\widehat{ABH} = 90° - \alpha$; il triangolo rettangolo AHD è congruente ad ABH (due angoli e il lato fra essi compreso sono congruenti); pertanto $\widehat{HDA} = 90° - \alpha$. Nel triangolo ADM: $\widehat{ADM} = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$; e $\widehat{DMA} = 180° - \alpha - (90° + \alpha) = 90° - 2\alpha$. Infine, nel triangolo AMC: $\widehat{AMC} = 180° - (90° - 2\alpha) = 90° + 2\alpha$ e $\widehat{MCA} = 180° - \alpha - (90° + 2\alpha) = 90° - 3\alpha$. Si applichi ora il Teorema dei seni (Teorema 12.4) al triangolo ABM:

$$\frac{BM}{\sin 3\alpha} = \frac{AM}{\sin(90° - \alpha)};$$

allo stesso modo, nel triangolo AMC:

$$\frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin(90° - 3\alpha)}.$$

Si ricordi che $BM = MC$ perché M è il punto medio di BC. Combinando fra loro le due relazioni trovate si ottiene:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90° - 3\alpha)} \quad , \quad \frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Quest'ultima uguaglianza, scritta nella forma $\sin 3\alpha \cos 3\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$, può essere trasformata, mediante la formula di duplicazione del seno, in $\sin 6\alpha = \sin 2\alpha$. A questo punto esistono due possibilità: la prima è che sia $6\alpha = 2\alpha$, da cui però $\alpha = 0$, che è impossibile. L'altra è $6\alpha = 180° - 2\alpha$, da cui $\alpha = 180°/8 = 22,5°$. L'angolo richiesto dal problema è il maggiore tra $\hat{B}$ e $\hat{C}$, cioè, nella notazione scelta in figura: $\hat{B} = \widehat{ABH} = 90° - \alpha = 90° - 22,5° = 67,5°$. la risposta doveva essere fornita in primi: $67,5 \cdot 60 = 4050$. □

Teorema 12.5. *(Teorema del coseno o di Carnot[5]) In un triangolo qualunque ABC siano a, b e c le lunghezze dei lati opposti agli angoli interni nei vertici A, B e C; si dicano rispettivamente α, β e γ tali angoli. Valgono le seguenti relazioni:*

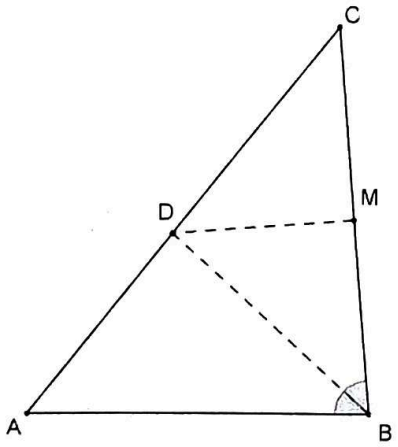
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Si osservi che il Teorema di Carnot comprende il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) come caso particolare: infatti, se il triangolo ABC è rettangolo, ad esempio nel vertice A, risulta $\cos\alpha = 0$; vale pertanto la relazione $a^2 = b^2 + c^2$.

Esempio 12.6. * (*American Mathematics Competition, 2002*)
Nel triangolo ABC il lato AC e l'asse del lato BC si incontrano in D, BD è la bisettrice di $\widehat{ABC}$. Se $AD = 9$ e $DC = 7$, qual è l'area del triangolo ABD?
a) 14; b) 21; c) 28; d) $14\sqrt{5}$; e) $28\sqrt{5}$.



Soluzione. Per il Teorema della bisettrice (Teorema 5.6) i lati AB e BC hanno lo stesso rapporto dei segmenti AD e DC; pertanto è possibile porre $AB = 9x$ e $BC = 7x$; essendo M punto medio di BC si ha $CM = MB = \frac{7}{2}x$. Si osservi ora che nel triangolo CDB il segmento MD è sia mediana sia altezza, e quindi CDB è isoscele sulla base BC (Teorema 5.9), e $CD = DB = 7$. Sia $\alpha = \widehat{DBC} = \widehat{ABD}$: nel triangolo rettangolo MDB si ottiene $\cos\alpha = (\frac{7}{2}x)/7 = \frac{x}{2}$. Utilizzando il Teorema del coseno (Teorema 12.5) nel triangolo ABD, si ricava:

$$81 = 49 + 81x^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9x \cdot \frac{x}{2},$$

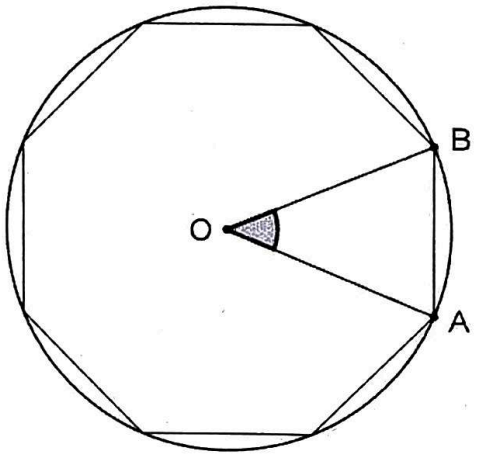
[5]Lazare Carnot (1753-1823), matematico francese.

da cui $x = 4/3$, $\cos\alpha = 2/3$ e $AB = 12$; dalla prima relazione fondamentale della trigonometria, $\sin\alpha = \sqrt{5}/3$. L'area di ABD si calcola tramite il Teorema 12.1:

$$\mathcal{A}(ABD) = \frac{1}{2}AB \cdot BD \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 14\sqrt{5};$$

La risposta corretta è dunque la *d*. □

Esempio 12.7. (*Compitone Copernico Udine, 2009*)
È dato un ottagono regolare di lato $l = \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Calcoli il candidato il raggio della circonferenza ad esso circoscritta. Inscriva quindi nella medesima circonferenza un dodecagono regolare, di cui calcolerà il lato e l'area.



Soluzione. In un ottagono regolare inscritto in una circonferenza ogni lato sottende un angolo al centro pari a $2\pi/8 = \pi/4$. Utilizzando il Teorema del coseno (Teorema 12.5) nel triangolo isoscele OAB, dove $OA = OB = r$, risulta:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\frac{\pi}{4},$$

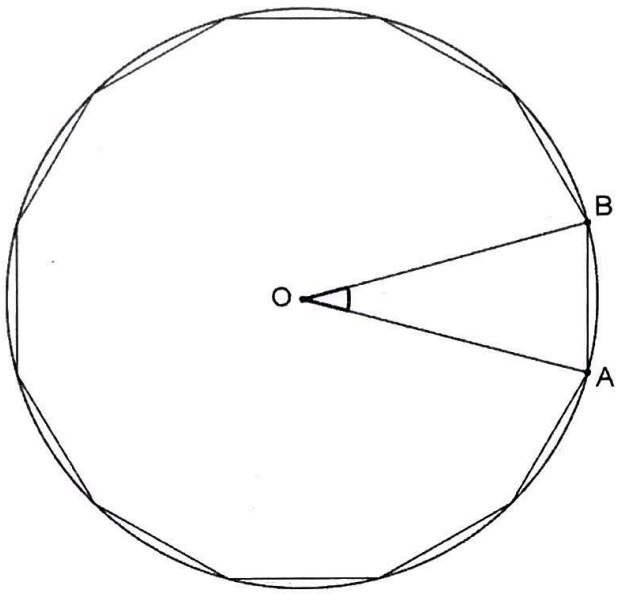
e cioè

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

da cui si ottiene facilmente che $r^2 = 1$ e quindi $r = 1$. Per lo stesso ragionamento visto poc'anzi, il lato del dodecagono regolare sottende un angolo al centro di $2\pi/12 = \pi/6$. Si può allora ragionare allo stesso modo, sempre col Teorema del coseno: detto l il lato del dodecagono,

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cos\frac{\pi}{6},$$

$$l^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad , \quad l = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$



L'area del dodecagono si troverà moltiplicando per 12 l'area del triangolo OAB, che, in base al Teorema 12.1, vale

$$\frac{1}{2}\,OA \cdot OB \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Dunque l'area totale è $12 \cdot \dfrac{1}{4} = 3$. □

In conclusione, il lato di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r varrà $l = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; il lato di un dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r varrà: $l = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (si veda il Lemma 8.4).

13. Geometria e disuguaglianze

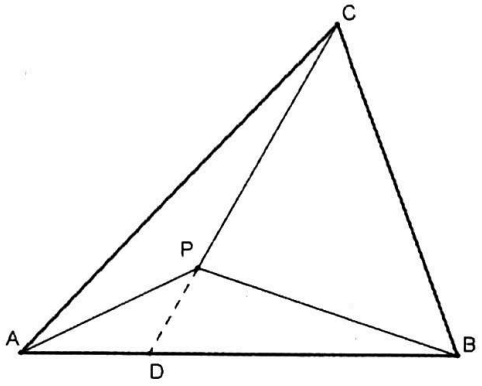
La prima parte di questo capitolo è dedicata a disuguaglianze di tipo strettamente geometrico, la seconda all'applicazione di disuguaglianze algebriche per risolvere problemi di geometria.

Teorema 13.1. *(Disuguaglianza triangolare) In un triangolo non degenere ciascun lato è minore della somma degli altri due*[1].

Esempio 13.1. * Sia P un punto del triangolo ABC. Dimostrare che la somma delle distanze di P dai vertici è compresa fra il semiperimetro p di ABC e il perimetro $2p$ di ABC.

Soluzione. La prima parte della dimostrazione è elementare: congiungendo P con i vertici del triangolo si formano i tre triangoli PAB, PBC e PCA; applicando in ciascuno di essi la Disuguaglianza triangolare (Teorema 13.1) si ottiene che: $AB \leq PA + PB$; $BC \leq PB + PC$; $CA \leq PC + PA$; sommando termine a termine le tre disuguaglianze si ricava $AB + BC + CA \leq 2PA + 2PB + 2PC$, da cui $PA + PB + PC \geq p$.
La seconda parte del problema è leggermente più impegnativa. Si prolunghi uno dei segmenti, ad esempio CP, fino a incontrare il lato opposto, AB, in un punto D.

[1] Molti testi scolastici proseguono aggiungendo la frase "e maggiore del valore assoluto della loro differenza"; si osservi però che questa seconda parte della proposizione è in realtà conseguenza della prima.



Applicando la Disuguaglianza triangolare (Teorema 13.1) al triangolo PDB si ha: $PB \leq PD + DB$; nel triangolo CDA: $CD \leq AD + AC$. Si sommano ora termine a termine le due disuguaglianze: $PB + CD \leq PD + DB + AD + AC$; al secondo termine si ha che $DB + AD = AB$; portando PD al primo termine si ottiene $CD - PD = PC$. Il risultato è infine $PB + PC \leq AB + AC$. Ripetendo altre due volte la medesima costruzione si ricavano ciclicamente le seguenti due disuguaglianze: $PC + PA \leq BC + AB$, e $PA + PB \leq CA + BC$. Sommando termine a termine le tre disuguaglianze e dividendo per due si ricava la seconda parte della tesi: $PA + PB + PC \leq 2p$. □

È molto utile il seguente:

Lemma 13.2. Il valore massimo (rispettivamente: minimo) dell'ordinata di un punto appartenente a una parabola rivolta verso il basso (rispettivamente: verso l'alto) è l'ordinata del suo vertice. L'ascissa del vertice di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è $-\frac{b}{2a}$.

Esempio 13.2. (*Gara a squadre Incontri olimpici*[2]*, 2014*)
Alberto apre una pasticceria di fianco ad una scuola sperando che gli studenti di quella scuola vadano a fare colazione da lui. Sa che se facesse pagare ogni brioche 70 cent o meno tutti i 2340 alunni della scuola andrebbero a far colazione da lui (ogni studente con una brioche) ogni giorno, mentre se alzasse il prezzo, ogni centesimo in più[3] a brioche gli farebbe perdere 20 clienti (al giorno). Sapendo che ogni brioche costa in ingredienti 10 cent ad Alberto, quante brioche al giorno deve vendere se vuole massimizzare i guadagni?

[2]Gli Incontri olimpici, nati nel 2009, sono un convegno annuale di insegnanti che si occupano di gare matematiche. I docenti partecipanti si confrontano fra loro svolgendo una gara a squadre.

[3]Il testo avrebbe dovuto specificare che sono ammessi anche aumenti di frazioni di centesimo.

Soluzione. Se Alberto aumenta il prezzo delle brioche di x centesimi, guadagnerà $70 + x - 10 = 60 + x$ centesimi per ogni brioche venduta. Il numero di clienti sarà $2340 - 20x$; pertanto il guadagno totale è $(60 + x)(2340 - 20x)$. Svolgendo i conti si ricava $-20x^2 + 1140x + 140400$. Il valore massimo si ottiene individuando il vertice della parabola: $-\frac{b}{2a} = \frac{57}{2}$ (Lemma 13.2); dunque il guadagno è massimizzato se l'aumento è di 57/2=28,5 centesimi a brioche. Il numero di brioche vendute al giorno è infine $2340 - 20 \cdot 28,5 = 1770$. □

Teorema 13.3. *(Disuguaglianza di Tolomeo) In un quadrilatero qualunque il prodotto delle diagonali è minore o uguale alla somma dei prodotti delle coppie di lati opposti; l'uguaglianza vale se e solo se il quadrilatero è ciclico (si veda il Teorema 9.3).*

Esempio 13.3. (*Austrian-Polish Mathematical Competition*[4]*, e ha ospitato numerosi altri Paesi del Centro Europa.*)
Siano a, b, c, d le lunghezze dei lati di un quadrilatero (considerati in senso orario), e sia S la sua area. Dimostrare che $2S \leq ac + bd$.

Soluzione. Siano d_1 e d_2 le diagonali del quadrilatero e α uno qualunque dei due angoli formati dalle diagonali. Applicando la Disuguaglianza di Tolomeo (Teorema 13.3) si ha che $d_1 \cdot d_2 \leq ac + bd$. Ma l'area del quadrilatero, in base al Teorema 12.2, è pari a $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \sin\alpha$. Vale quindi la seguente catena di disuguaglianze:

$$2S = d_1 \cdot d_2 \sin\alpha \leq d_1 \cdot d_2 \leq ac + bd\,,$$

il che dimostra la tesi. □

La disuguaglianza nota in ambito olimpico (e non solo) come AM-GM è senza dubbio la più importante nella risoluzione di problemi delle gare di matematica.

Teorema 13.4. *(Disuguaglianza "AM-GM") Dato un insieme A di n numeri reali e positivi, la loro media geometrica (GM) è minore o uguale alla loro media aritmetica (AM). L'uguaglianza vale se e solo se gli n numeri sono tutti uguali fra loro.*

La disuguaglianza è uno degli elementi di una più ampia catena di disuguaglianze comprendente le medie, il valore minimo ($min(A)$) e il valore massimo ($max(A)$):

$$min(A) \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq max(A)\,,$$

[4]Gara nata nel 1978; Austria e Polonia hanno ospitato la competizione ad anni alterni. Dal 2007 la gara ha preso il nome di *Middle European Mathematical Olympiad*, 2001

dove HM è la media armonica, QM la media quadratica.

Esempio 13.4. ** (*Tratto da Engel 1998, Problema 100, pag. 186*)
Siano a, b e c i lati di un triangolo. Dimostrare che

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\,.$$

Soluzione. Per la Disuguaglianza triangolare (Teorema 13.1) ciascuno dei tre denominatori è un numero positivo. Sia $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$; risulta allora che

$$a=\frac{y+z}{2}\qquad b=\frac{z+x}{2}\qquad c=\frac{x+y}{2}\,.$$

Si può ora riscrivere il primo termine della disuguaglianza nel seguente modo:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\,,$$

dove l'ultimo termine si può a sua volta riscrivere come

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\,.\,.$$

Si applichi la Disuguaglianza AM-GM (Teorema 13.4) al termine di destra (a meno del fattore $1/2$) dell'ultima uguaglianza:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\geq\sqrt[6]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}}=1\,,$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 6=3\,;$$

con ciò la tesi è dimostrata. □

Teorema 13.5. *(Disuguaglianza di riarrangiamento) Date due n-ple ordinate $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ e $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$ di numeri reali, valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$a_1\cdot b_n+a_2\cdot b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot b_2+a_n\cdot b_1\leq\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_{\pi(i)}\leq$$

$$\leq a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_{n-1}\cdot b_{n-1}+a_n\cdot b_n\,,$$

dove $\pi(i)$ è una qualsiasi permutazione di $1,2,\ldots,n$. L'uguaglianza si ottiene se e solo se $a_1=a_2=\ldots=a_n$ e $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

In altre parole, la somma delle n coppie associate al contrario (partendo dal più piccolo elemento di una n-pla associato col più grande dell'altra, e così via) è il minimo valore ottenibile per la somma delle coppie di elementi associati in ordine qualsiasi (ciascuno preso da una delle due n-ple); mentre la somma delle coppie associate ordinatamente (dal più piccolo elemento al più grande per ambedue le n-ple) fornisce il valore massimo possibile.

Esempio 13.5. * Siano a, b e c i lati di un triangolo qualsiasi. Dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, e indicare quando vale l'uguaglianza.

Soluzione. Esistono altri metodi (algebrici) di risolvere l'esercizio; ma il più immediato è utilizzare la Disuguaglianza di riarrangiamento (Teorema 13.5). Si supponga, senza perdita di generalità, che sia $a \leq b \leq c$. Allora $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. L'uguaglianza si ha quando $a = b = c$, e cioè quando il triangolo è equilatero. □

14. Problemi

Questo capitolo contiene una collezione di problemi, che lo studente potrà svolgere per verificare se la teoria richiamata ai capitoli precedenti sia stata adeguatamente appresa e rielaborata. Gli esercizi proposti sono, volutamente, in ordine sparso sia come argomenti trattati sia come (presunta) difficoltà.
Le soluzioni non seguono immediatamente il testo di ciascun problema come negli esempi, ma sono esposte tutte insieme nel capitolo successivo.

Problema 1 (*Giochi di Archimede 2015, gara triennio*)
Un triangolo possiede una bisettrice e una mediana tra loro perpendicolari, di lunghezze, rispettivamente, 7 e 8. Qual è l'area del triangolo?
a) 36; b) 35; c) 42; d) 48; e) 28.

Problema 2 ** (*Olimpiadi della matematica, finale nazionale a squadre, 2014*)
Mentre aspetta il ritorno del padrone Ellisseo, il vecchio cane Desargo intraprende ogni giorno una malinconica passeggiata per il cortile della reggia, che ha la forma di una corona circolare. Desargo parte dalla sua cuccia, situata sulla circonferenza esterna, e si muove all'interno del cortile lungo segmenti appartenenti a rette la cui distanza dal centro del cortile è sempre la stessa, cambiando direzione solo quando, alternativamente, raggiunge un punto della circonferenza interna o uno di quella esterna. All'inizio la traiettoria di Desargo forma un angolo di 63° con la tangente

alla circonferenza esterna nel punto di partenza. Invece l'angolo tra la traiettoria e la tangente alla circonferenza interna nel primo punto in cui Desargo raggiunge la circonferenza interna misura 34°. Quando Desargo ripassa per la seconda volta in un punto in cui è già passato, interrompe la sua passeggiata e ripensa con nostalgia al suo padrone. Quanti cambi di direzione effettua al massimo Desargo in una sua passeggiata?

Problema 3 (*Teorema di Viviani generalizzato*[1])
Sia P un punto interno o sui lati di un triangolo qualsiasi, e siano X, Y, Z le distanze di P dai lati o dai prolungamenti dei lati. Se h_1, h_2, h_3 sono le altezze del triangolo rispettivamente parallele a X, Y, Z, dimostrare che $X/h_1 + Y/h_2 + Z/h_3 = 1$.

Problema 4 *** (*Quaestio Copernicana, aprile 2010*)
Si prenda un punto P su una circonferenza di raggio r. Si tracci la tangente t alla circonferenza per P. Si consideri quindi un punto Q sulla circonferenza, diverso da P, in modo che la tangente alla circonferenza per Q incontri t in un punto R. Dimostrare che gli ortocentri dei triangoli PQR al variare di Q sulla circonferenza sono tutti equidistanti da P, e che la loro distanza da P vale r.

Problema 5 ** (*Compitone Copernico Udine, 2007*)
È dato un triangolo scaleno ABC avente un angolo ottuso nel vertice C; siano α, β e γ, rispettivamente, gli angoli nei vertici A, B e C del triangolo. Da C si conducano due segmenti, perpendicolari ai lati AC e BC, che incontrano il lato AB in H e K. Verificare che il rapporto fra l'area del triangolo HKC e quella del triangolo ABC è pari a $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Problema 6 * (*Gara a squadre on line, dicembre 2010*)
Marco, per realizzare un albero di carta, prende un foglio di carta quadrata $ABCD$ di lato 24 cm. Dopo avere eseguito la prima piega in modo che il vertice C vada a coincidere col punto medio M del lato AB, si ferma e si chiede: quanto vale l'area di $ECFG$, cioè della parte comune tra fronte e retro del foglio?

Problema 7 ** (*Ontario Secondary School Mathematical Bulletin*[2], *1975*)
Un punto P interno a un triangolo equilatero ABC dista 3 da A, 4 da B e 5 da C. Calcolare il lato l del triangolo.

[1] Si veda il Teorema di Viviani, Esempio 1.3, e il Lemma 1.1; si veda anche l'Esempio 6.1.
[2] Rivista dell'Università di Waterloo, Ontario (Canada).

Problema 8
In un trapezio $ABCD$ di basi AB e CD si considerino i segmenti paralleli alle basi. Dimostrare che:
- il segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui è la media aritmetica fra le basi;
- il segmento che divide $ABCD$ in due trapezi simili è la media geometrica delle basi;
- il segmento che divide $ABCD$ in due trapezi equivalenti è la media quadratica delle basi;
- il segmento passante per il punto d'incontro delle diagonali è la media armonica delle basi.

Problema 9 * (*American Mathematics Competition, 1966*)
Nel triangolo ABC le mediane AM e CN si incontrano in O. Sia P il punto medio di AC, e MP intersechi CN in Q. Se l'area del triangolo OMQ è a, calcolare l'area di ABC.

Problema 10 * *(Quaestio Copernicana, novembre 2009)*
Determinare la differenza fra l'area della regione descritta da una moneta di raggio r che si muove in tutti i modi possibili all'interno di un semicerchio di raggio $3r$ e quella della regione descritta dal centro della moneta.

Problema 11 * (*Gara a squadre on line, marzo 2010*)
Una semicirconferenza è inscritta in un quadrilatero $ABCD$ in modo che il diametro della semicirconferenza giaccia su BC e il punto medio di BC coincida col centro della semicirconferenza. Se AB=16 cm e CD=18 cm, quanto misura BC? (Dare come risposta $BC \cdot 100$).

Problema[3] 12
Si consideri un semicerchio di diametro AB; sia P un punto sul suo diametro. Tracciati i semicerchi di diametro AP e PB, si disegni la perpendicolare ad AB passante per P; sia Q il punto in cui essa interseca la semicirconferenza. Dimostrare che

[3]La dimostrazione costituisce la proposizione 4 del Libro dei Lemmi, attribuito ad Archimede. Secondo lo storico della matematica Eduard Dijksterhuis, il Libro dei Lemmi, giunto fino a noi attraverso una versione araba, non è di Archimede; è possibile, tuttavia, che derivi da un'opera di Archimede andata perduta. Una variante dell'esercizio è stata assegnata all'Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione straordinaria 2009.

l'area compresa fra il semicerchio grande e i due piccoli (chiamata da Archimede[4] "arbelo" o "trincetto del calzolaio") è equivalente a quella del cerchio di diametro PQ.

Problema 13 * (*Gara a squadre on line, febbraio 2011*)
Sfuggiti alle forze imperiali, Han e Leila decisero di cercare rifugio presso la "Città delle nuvole", base spaziale e capitale del pianeta Bespin. La città volante era sorretta da una base antigravitazionale quadrata e la città era costruita al centro della base sulla parte comune ai 4 triangoli equilateri costruiti internamente alla base a partire dai lati. Se l'area del quadrato era di $450+250\sqrt{3}$ ui^2 (ui= Unità Imperiali), qual era l'area (in ui^2) su cui era costruita la città?

Problema 14 *** (*Olimpiadi nazionali Albania, 2010*)
Siano A e B due punti fissati su una data circonferenza e XY un diametro di tale circonferenza. Trovare il luogo geometrico dei punti di intersezione fra AX e BY (AB non è un diametro della circonferenza).

Problema 15 (*Tratto da Coxeter, Greitzer 1967*)
Dimostrare che, se un quadrilatero di lati a, b, c e d è contemporaneamente inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a una circonferenza, il quadrato della sua area è pari ad $abcd$.

Problema 16 * (*Gara a squadre on line, ottobre 2010*)
Era necessario uscire dall'U-boat quanto prima. Un tubo lanciasiluri!!! Jones fu folgorato dalla malsana idea di trasformarsi in un siluro e farsi sparare fuori dal sommergibile. Sul pannello di controllo, per non dimenticarsi il codice di lancio, qualcuno aveva appuntato: "è dato un triangolo scaleno di lati 13, 14 e 15 cm. Si costruisca il simmetrico del triangolo rispetto al baricentro. Il codice di lancio è l'area della parte comune ai due triangoli."

Problema 17 ** (*Tratto da Larson 1983*)
Sia P un punto interno a un triangolo ABC, e x, y z le distanze di P dai lati BC, AC e AB rispettivamente. Dove deve essere collocato P affinché il prodotto xyz sia massimo?

Problema 18 *
Un uomo osserva un prato circolare con 6 alberi sulla circonferenza. Cammina da un albero all'altro in linea retta e trova che le distanze tra gli alberi sono 12, 12, 19, 19, 33, 33 passi. Quanto vale (in passi) il raggio del prato?

[4] Archimede di Siracusa (287?-212 a.C.), matematico e fisico greco.

Problema 19 (*Compitone Copernico Udine, 2008*)
Sono date due rette parallele non coincidenti r e s ed una trasversale t che le taglia. Si prenda un qualunque punto P su t interno alla striscia delimitata da r e s e si conduca per esso la retta u perpendicolare a t. Dimostrare che la somma delle aree dei due triangoli individuati dalle quattro rette è minima quando P giace sulla retta mediana della striscia.

Problema 20 ** (*The New York State Mathematics Teachers' Journal*[5], *1980*)[6]
Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB. È noto che $\widehat{BAE} = 60°$, $\widehat{ABD} = 50°$ e $\widehat{ACB} = 20°$. Dimostrare che $\widehat{AED} = 30°$.

Problema 21 ** (*Olimpiadi nazionali Costa Rica, 2003*)
Sia AB un diametro della circonferenza ω. Sia l la tangente a ω passante per B. Si prendano due punti C e D su l tali che B sia tra C e D. Siano E, F le intersezioni di ω con AC e AD, rispettivamente, mentre G e H sono le intersezioni di ω con CF e DE, rispettivamente. Dimostrare che $AH = AG$.

Problema 22 * (*Gara Mathesis Udine*[7], *1992*)
Entro un tubo a sezione circolare, con diametro interno di 24 cm, passano sei cavi, anch'essi a sezione circolare. I due cavi più grossi hanno il medesimo raggio, il più grande possibile; anche i due cavi intermedi hanno uguale raggio, il più grande possibile; infine, i due cavi più piccoli passano, ancora con raggio il più grande possibile, nei due spazi interni individuati dagli altri quattro cavi. Qual è il diametro, in millimetri, di ciascuno degli ultimi due cavi?

Problema 23 (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione suppletiva 2009*)
Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, sui suoi cateti, presi come diametri ed esternamente, si costruiscono due semicerchi; da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti lunule di Ippocrate[8]. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

---

[5] Rivista edita dalla *Association of Mathematics Teachers of New York State.*

[6] Questo esercizio fa parte di una classe di problemi noti come "80-80-20", perché riguardano triangoli isosceli aventi angoli alla base di 80° e angolo al vertice di 20°. Un problema della stessa categoria è il 74.

[7] La Mathesis di Udine ha organizzato annualmente una gara individuale per le scuole superiori dal 1978 al 2002.

[8] Ippocrate di Chio (470-410 a.C.), matematico e astronomo greco.

Problema 24 *** (*Olimpiadi della matematica, finale nazionale a squadre, 2012*)
Per l'ultima volta i nostri eroi hanno raccolto le 7 sfere del drago, ma il rituale per evocare Shannon è più complicato del solito. Dispongono le sfere sui vertici di un ettagono regolare $ABCDEFG$ di centro O e di area 4095 m^2. Il drago uscirà da un punto P che deve essere interno all'ettagono, stare sulla circonferenza passante per O, A e B e tale che $(PA - PB) : AB = 2 : 3$. Per invocare il drago, oltre a recitare la formula magica dovranno anche dire l'area di PAB, in m^2. Che numero dovranno dire?[9]

Problema 25 * (*Gara a squadre on line, novembre 2009*)
Il campo dove si è tenuto l'annuale torneo fra i cavalieri ha la forma di un parallelogramma con un angolo di 40°. Le corde che dividono l'area sono fissate nei vertici del parallelogramma e nei punti medi dei lati. Il parallelogramma più piccolo che si viene a formare al centro ha un'area di 72 m^2. Qual è l'area del parallelogramma iniziale? (trascurare la dimensione delle corde).

Problema 26 ** (*Olimpiadi nazionali Polonia*[10], *Olimpiadi nazionali Gran Bretagna, 1966, Olimpiadi nazionali Bulgaria, 1968*)
Siano A, B, C e D quattro vertici consecutivi di un poligono regolare avente n lati. Noto che $1/AB = 1/AC + 1/AD$, calcolare n.

Problema 27 *** (*Spring Mathematical Tournament*[11], *Jambol*[12], *2000*)
Il cerchio inscritto in un triangolo isoscele ABC di base AB tocca i lati AC e CB rispettivamente in M e in N. Una tangente t è tracciata sul minore degli archi MN; essa interseca NC in P e MC in Q. Sia T il punto di intersezione dei segmenti AP e BQ. a) Dimostrare che T appartiene al segmento MN; b) dimostrare che la somma delle aree dei triangoli ATQ e BTP è la minima possibile quando t è parallela ad AB.

---

[9] A puro titolo di curiosità: durante la gara questo problema ha ricevuto risposte da sole 5 squadre su 33; di queste 5, una lo ha sbagliato 2 volte, e tutte le altre una volta. Nessuna squadra ha risposto giusto. Il punteggio raggiunto dal problema è stato 132, più 20 di bonus, per un totale di 152 punti; se qualche squadra fosse stata in grado di risolverlo, scegliendolo come jolly avrebbe guadagnato 304 punti: quanto basta per rovesciare le sorti di una gara.

[10] Honsberger 2001 riferisce che il problema è stato assegnato alle Olimpiadi polacche fra il 1949 e il 1954, ma non specifica precisamente l'anno.

[11] Importante gara nazionale bulgara, nata nel 1971.

[12] Città della Bulgaria; a volte trascritta anche Yambol o Iambol.

Problema 28 *

Dimostrare che in un triangolo la somma delle lunghezze delle mediane è sempre compresa fra i 3/4 del perimetro e il perimetro stesso.

Problema 29 * (*Disuguaglianza di Eulero*)

Siano R e r rispettivamente il raggio della circonferenza circoscritta e inscritta in un triangolo ABC. Dimostrare che $R \geq 2r$.

Problema 30 ** (*Eötvös Mathematics Competition*[13], *1941; Lowell Putnam Mathematical Competition*[14], *1967*)

Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza di raggio r. Dimostrare che se $AB = CD = EF = r$, allora i punti medi di BC, DE e FA sono vertici di un triangolo equilatero.

Problema 31 *** (*New York State Mathematics League*[15], *1983, Power Question*)

La circonferenza I è inscritta nel triangolo isoscele ABC dove $BC = AC$. La circonferenza E è tangente a AB e ai prolungamenti di BC e AC dalla parte di B e di A[16]. Sia r il raggio di I e r_a il raggio di E.

a) Dimostrare che $r \cdot r_a = (\frac{AB}{2})^2$.

b) Generalizzare il risultato precedente a un triangolo qualsiasi in questo modo: la circonferenza I (di raggio r) è inscritta nel triangolo ABC di base AB, ed è tangente ad AB in P. La circonferenza ex-inscritta E (di raggio r_a) è tangente al lato AB in Q. Dimostrare che $r \cdot r_a = AP \cdot PB$.

c) Dimostrare che $AP = QB$; dimostrare[17] che $PQ = BC - AC$.

Problema 32 ** (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 2010*)

Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $\widehat{CAB} = \widehat{CDA}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{ACD}$. Detto M il punto medio di AB si dimostri che $\widehat{BCM} = \widehat{DBA}$.

---

[13] La più antica gara di matematica del mondo, è stata fondata nel 1894. Dopo la seconda guerra mondiale ha cambiato nome in Kürschák Competition.

[14] Una delle più antiche e più note gare americane di matematica, nata nel 1927.

[15] Gara matematica dello stato di New York, nata nel 1973.

[16] Tale circonferenza è una delle tre *circonferenze ex-inscritte* al triangolo ABC.

[17] Il testo fa evidentemente riferimento al caso particolare in cui sia $BC > AC$; sarebbe stato più opportuno specificare che $PQ = |BC - AC|$.

Problema 33 ** (*Test iniziale Stage Senior*[18], *2015*)
Sia $ABCD$ un parallelogramma. La circonferenza circoscritta ad ABD passa per l'ortocentro di BCD: a) se e solo se $ABCD$ è un quadrato; b) se e solo se $ABCD$ è un rettangolo; c) se e solo se $ABCD$ è un rombo; d) se e solo se $ABCD$ è un rettangolo oppure un rombo; e) sempre.

Problema 34 * (*Olimpiadi Fiandre*[19], *2006*)
Sia ABC un triangolo equilatero e P un punto su AB. Sia Q il punto su BC tale che PQ è perpendicolare ad AB. Sia R il punto su AC tale che QR sia perpendicolare a BC. E sia S il punto su AB tale che RS sia perpendicolare ad AC. Sia Q' il punto su BC tale che PQ' è perpendicolare a BC. Sia R' il punto su AC tale che $Q'R'$ sia perpendicolare ad AC. E sia S' il punto su AB tale che $R'S'$ sia perpendicolare ad AB. Determinare PB/AB se $S = S'$.

Problema 35 (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione straordinaria 2003*)
Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

Problema 36
Dato un triangolo qualunque ABC, dimostrare che il suo baricentro è anche baricentro del triangolo MNP costruito congiungendo punti medi dei suoi lati. Dimostrare quindi che il suo circocentro è l'ortocentro del triangolo MNP costruito congiungendo i punti medi dei suoi lati.

Problema 37 * (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 2014*)
Sia ABC un triangolo tale che, detto H il piede dell'altezza condotta da C, si ha $AH = 3HB$. Siano inoltre: M il punto medio di AB; N il punto medio di AC; P il punto dal lato opposto di B rispetto alla retta AC tale che $NP = NC$ e $PC = CB$. Dimostrare che $\widehat{APM} = \widehat{PBA}$.

[18]Lo *Stage Senior*, organizzato dalla Commissione Olimpiadi dell'Unione Matematica Italiana, è il primo gradino della preparazione della squadra italiana alle Olimpiadi internazionali (si veda la nota al Problema 44). Si svolge annualmente, all'inizio di settembre, a Pisa.
[19]Gara matematica della parte fiamminga del Belgio.

Problema 38 (*Olimpiadi della matematica, gara provinciale 1997*)
Sia dato un quadrato $ABCD$ di lato unitario e siano M e N due punti rispettivamente sui lati AB e AD tali che $AM = AN$. Quanto può valere, al massimo, l'area del quadrilatero $CDNM$? a) 1/2; b) 9/16; c) 19/32; d) 5/8; e) 2/3.

Problema 39 * (*Eötvös Mathematics Competition, 1933*)
Le circonferenze k_1 e k_2 sono tangenti nel punto P. Viene tracciata una retta per P, che interseca k_1 in A_1 e k_2 in A_2. Una seconda retta è tracciata per P, che interseca k_1 in B_1 e k_2 in B_2. Dimostrare che i triangoli PA_1B_1 e PA_2B_2 sono simili.

Problema 40 ** (*Tratto da Andreescu, Mushkarov, Stoyanov 2006*)
Dato un trapezio di area 1, trovare il minor valore possibile per la lunghezza della sua diagonale maggiore.

Problema 41 (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione suppletiva P.N.I. 2007*)
Si consideri la proposizione: "in ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

Problema 42 * (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 2013*)
Nel triangolo ABC supponiamo di avere $a > b$, dove $a = BC$ e $b = AC$. Sia M il punto medio di AB, e siano α e β le circonferenze inscritte, rispettivamente, ai triangoli ACM e BCM. Siano poi A' e B' i punti di tangenza di α e β con CM. Dimostrare che $A'B' = \frac{a-b}{2}$.

Problema 43 (*Tournament of the Towns*[20], *1981*)
Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza di centro O avente le diagonali perpendicolari. Dimostrare che la linea spezzata AOC divide il quadrilatero in due parti aventi uguale area.

Problema 44 ** (*International Mathematical Olympiad*[21], *1985*)
Una circonferenza ha centro sul lato AB del quadrilatero ciclico $ABCD$. Gli altri tre lati sono tangenti alla circonferenza. Dimostrare che $AD + BC = AB$.

[20] *The International Mathematics Tournament of the Towns* è una gara che ha avuto origine in Russia nel 1979, e che ora coinvolge più di 100 città in oltre 10 paesi di tutti i continenti.

[21] La gara nota come *International Mathematical Olympiad*, o più brevemente *IMO*, è la più importante gara internazionale di matematica. Si svolge a partire dal 1959, ogni anno in un paese diverso. Attualmente partecipano più di 100 nazioni.

Problema 45 * (*Olimpiadi nazionali Finlandia, 2007*)
In un piano ci sono cinque punti; nessuna terna di punti risulta allineata. Dimostrare che esistono sempre quattro punti che formano un quadrilatero convesso.

Problema 46 (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione suppletiva P.N.I. 2009*)
Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo[22] così ottenuto ha la stessa lunghezza della circonferenza data.
Domanda supplementare[23]: si dimostri che l'area della pelecoide sta a quella del cerchio come PQ sta a MN.

Problema 47 * (*Olimpiadi della matematica, gara provinciale 1992*)
Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza γ. Dette rispettivamente A', B', C', D' le intersezioni di γ con le bisettrici degli angoli in A, B, C, D del quadrilatero assegnato, si dimostri che $A'B'C'D'$ è un rettangolo. In quali casi $A'B'C'D'$ è un quadrato? La medesima costruzione può essere applicata a $A'B'C'D'$ per ottenere un rettangolo $A"B"C"D"$, e così via. Si descrivano i rettangoli così ottenuti.

Problema 48 (*Gara a squadre on line, marzo 2009*)
L'orologio del bisnonno di Dirac si è rotto. Per ripararlo, Maurice deve costruire una cinghietta, per mettere in rotazione due ingranaggi circolari di raggio rispettivamente 10 e 60 mm, con i centri che distano 100 mm l'uno dall'altro. Non riuscendo da solo a risolvere il problema, chiede aiuto all'ispettrice Leblanc. Quanto deve essere lunga in mm la cinghia?

Problema 49 * (*The AMATYC[24] Review, autunno/inverno 1982*)
Sia D un punto sul lato AC del triangolo rettangolo ABC, dove $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$. Le due circonferenze inscritte nei triangoli ABD e CBD hanno lo stesso raggio. Quanto vale tale raggio?

---

[22] La figura è nota anche come *pelecoide* (parola di origine greca che significa "a forma di scure"). La pelecoide è citata nelle *Definizioni* di Erone, 27-38.

[23] Questo quesito non era presente nel testo proposto all'Esame di Stato.

[24] *AMATYC* è l'acronimo di *American Mathematical Association of Two-Year Colleges*. L'associazione ha pubblicato una rivista fino al 2008.

Problema 50 ** (*Olimpiadi della matematica, gara provinciale 2000*)
Si scelgano i punti H, K, M sui lati di un triangolo ABC in modo tale che AH sia un'altezza, BK sia una bisettrice e CM sia una mediana. Si indichi con D l'intersezione tra AH e BK, e con E l'intersezione tra HM e BK. Sapendo che $KD = 2$, $DE = 1$, $EB = 3$ si dimostri che: (1) HM è parallelo ad AC; (2) $AB = AC$; (3) $AB = BC$.

Problema 51 ** (*The Wohascum County Problem Book*[25], *quesito 86*)
Si consideri un triangolo ABC i cui angoli α, β e γ (relativi ai vertici A, B e C rispettivamente), soddisfano la condizione $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Sotto quali condizioni su α, β e γ un fascio di luce uscente da C può essere diretto sul segmento AB, essere riflesso verso BC ed essere di nuovo riflesso fino al vertice A? (Si assuma che l'angolo di incidenza sia uguale all'angolo di riflessione).

Problema 52 (*Tratto da Coxeter, Greitzer 1967*)
Un quadrilatero ciclico ha diagonali perpendicolari che si incontrano in P; dimostrare che il segmento per P perpendicolare a uno qualunque dei lati del quadrilatero biseca il lato opposto.

Problema 53 * (*Teorema di Napoleone*[26])
Sia ABC un triangolo qualunque. Si costruiscano tre triangoli equilateri sui suoi lati (tutti e tre esternamente o tutti e tre internamente). Dimostrare che il triangolo ottenuto congiungendo i loro centri è equilatero.

Problema 54 ** (*Olimpiadi nazionali Austria*[27])
Si consideri il triangolo rettangolo ABC con $\hat{C} = 90°$. Siano A_1 e B_1 due punti sulla retta AB (A_1 dalla parte di A, B_1 dalla parte di B), tali che $A_1A = BB_1 = AB$, e sia N il piede della perpendicolare da A_1 alla retta B_1C. Dimostrare che il rettangolo con lati B_1C e CN ha area doppia di quella del quadrato di lato AB.

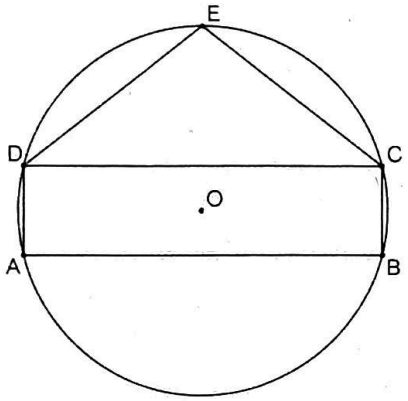
[25] Raccolta di problemi proposti in alcune scuole degli Stati Uniti. La "contea di Wohascum" è un nome fittizio.

[26] La dimostrazione di questo teorema è attribuita a Napoleone Bonaparte, ma l'attribuzione non è certa.

[27] Ho trovato il problema su Kuczma, Windishbacher 1998, pag. 11, ma non sono riuscito a risalire all'anno di assegnazione.

Problema 55 ** (*International Mathematical Olympiad, 1961*)
Dimostrare che, per ogni triangolo di lati a, b e c e area $\mathcal{A}$, vale che $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\mathcal{A}$.

Problema 56 (*Lowell Putnam Mathematical Competition, 1986*)
Si inscrivano in una circonferenza un rettangolo di base b e altezza h e un triangolo isoscele di base b coincidente con una delle basi del rettangolo, come indicato in figura.



Per quale valore di h il rettangolo e il triangolo hanno la medesima area?

Problema 57 (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione straordinaria 2005*)
Sia ABC un triangolo. Sui lati, esternamente, si costruiscano i quadrati $ABDE$, $BCFG$ e $CAHL$. Dimostrare che AHE, BDG e CFL sono equivalenti ad ABC.

Problema 58 (*Gara a squadre on line, novembre 2009*)
La pianta di una casa di Matlandia ha forma quadrata. Indicato con $ABCD$ questo quadrato, di lato 10 m, detti M e N i punti medi dei lati AB e AD, determinare la superficie del ripostiglio individuato dalla parte comune ai triangoli AMD e CDN (in m^2).

Problema 59 (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 2012*)
Sui lati di un triangolo ABC rettangolo in A vengono scelti tre punti D, E ed F (rispettivamente su BC, AC e AB) in modo che il quadrilatero $AFDE$ sia un quadrato. Se x è la lunghezza di un suo lato, dimostrare che $1/x = 1/AB + 1/AC$.

Problema 60 *** (*Tournament of the Towns, 1998*)
Una circonferenza di centro O è inscritta in un angolo. Sia A il simmetrico di O rispetto a uno dei lati dell'angolo. Le tangenti alla circonferenza uscenti da A intersecano l'altro lato dell'angolo nei punti B e C. Dimostrare che il circocentro del triangolo ABC giace sulla bisettrice dell'angolo originario.

Problema 61 ** (*Atlantic Region Mathematics League*[28], *1983*)
In un triangolo isoscele le altezze si intersecano in un punto della circonferenza inscritta. Calcolare il coseno dell'angolo al vertice.

Problema 62 ** (*The Wohascum County Problem Book, quesito 37*)
Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché esista un punto P interno ad $ABCD$ tale che i quattro triangoli ABP, BCP, CDP e DAP siano equivalenti.

Problema 63 * (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 1999*)
Dato un foglio rettangolare di lati a e b, con $a > b$, determinare l'area del triangolo che risulta dalla sovrapposizione dei due lembi che si ottengono piegando il foglio lungo una diagonale.

Problema 64 * (*International Mathematical Olympiad, 1959*)
Costruire un triangolo rettangolo di ipotenusa fissata, noto che la mediana relativa all'ipotenusa ha lunghezza pari alla media geometrica delle lunghezze dei due lati adiacenti.

Problema 65 ** (*Olimpiadi della matematica, gara provinciale 2012*)
Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.
(a) Si dimostri che gli angoli $\widehat{BAP}$ e $\widehat{QAC}$ sono congruenti;
(b) si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;
(c) si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero $ABPC$ vale quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.

[28] Gara fra stati americani della costa atlantica, nata nel 1975.

Problema 66 *** (*IMO shortlist*[29], *1987*)
Sia ABC un triangolo. Per ogni punto M del segmento BC siano B' e C' le proiezioni ortogonali di M sulle rette AC e AB, rispettivamente. Determinare i punti M per i quali la lunghezza di $B'C'$ sia minima.
Versione semplificata: da un punto M dell'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo si conducano le perpendicolari MB' e MC' ai cateti AB e AC, rispettivamente. Determinare la posizione di M per cui sia minima la lunghezza di $B'C'$.

Problema 67 ** (*Pi Mu Epsilon Journal*[30], *vol. 7, 1981*)
Data una semicirconferenza di diametro AB e centro O, si prenda su OB un punto C e si tracci la mezza corda perpendicolare ad AB, che incontrerà la semicirconferenza in D. Si inscriva quindi una circonferenza di centro P tangente a BC in E, tangente a CD e tangente all'arco BD in F. Si dimostri che il triangolo AED è isoscele.

Problema 68 * (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale 2009*)
Sia $ABCD$ un quadrato di centro O. Si costruiscano due triangoli isosceli BCJ e CDK, esterni al quadrato, di base BC e CD rispettivamente e congruenti fra loro. Sia poi M il punto medio di CJ. Si provi che le rette OM e BK sono perpendicolari.

Problema 69 *** (*The Wohascum County Problem Book, quesito 48*)
Tre circonferenze di raggio 1 si intersecano in un punto del piano. Sia A l'insieme di punti che giacciono in almeno due dei cerchi delimitati dalle circonferenze. Qual è la più piccola area possibile per la regione A?

Problema 70 ** (*International Mathematical Olympiad, 1966*)
Si prendano tre punti qualsiasi M, K e L interni ai lati AB, BC e CA di un triangolo ABC. Dimostrare che almeno uno dei triangoli MAL, KBM e LCK ha area che non supera un quarto dell'area di ABC.

---

[29] I comitati olimpici dei paesi partecipanti alle IMO possono mandare uno o più problemi al comitato del paese organizzatore; l'elenco dei problemi è detto *longlist*; il comitato seleziona un gruppo più limitato di problemi (*shortlist*). Prima dello svolgimento delle IMO i rappresentanti dei vari paesi si incontrano e individuano i sei problemi da assegnare. Il presente problema è stato proposto dalla delegazione francese; ha superato la prima selezione ma non è stato scelto alla seconda.

[30] Rivista edita dal *National Pi Mu Epsilon Council*, associazione nata nel 1914 presso la Syracuse University, New York. La rivista è attiva dal 1949.

Problema 71 (*Lowell Putnam Mathematical Competition, 2000*)
L'ottagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ è inscritto in una circonferenza, con i vertici nell'ordine indicato. Noto che il poligono $P_1P_3P_5P_7$ è un quadrato di area 5 mentre il poligono $P_2P_4P_6P_8$ è un rettangolo di area 4, trovare il massimo valore possibile per l'area dell'ottagono.

Problema 72 *** (*School Science and Mathematics*[31], *1983*)
Sia P il centro di un esagono regolare costruito esternamente sul lato AB di un triangolo ABC. Sia Q il centro di un triangolo equilatero costruito esternamente sul lato AC. Se M è il punto medio di BC, dimostrare che l'angolo $\widehat{PMQ}$ è retto.

Problema 73 ** (*Olimpiadi nazionali Brasile, 2006*)
Sia ABC un triangolo. La bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ incontra il lato AC in P; sia I l'incentro di ABC. Dimostrare che, se $AP + AB = BC$, allora il triangolo API è isoscele.

Problema 74 ** (*Journal of Recreational Mathematics*[32], *n. 14, 1982*)
Sia ABC un triangolo isoscele[33] con $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 80°$. Un punto M è disposto sul lato AB in modo che sia $AM = BC$. Calcolare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{BCM}$.

Problema 75 (*Giochi di Archimede, 2007*)
Il quadrato $ABCD$ ha il lato lungo 3 m. Il segmento EF è lungo 1 m ed è parallelo ad AB. Quanto vale l'area dell'esagono $ABFCDE$?
a) 5 m^2; b) 5,5 m^2; c) 6 m^2; d) 7 m^2; e) 7,5 m^2.

Problema 76 * (*Prova di ammissione alla Scuola Galileiana di Padova, 2004*)
Diciamo pitagorico un triangolo rettangolo se le lunghezze dei suoi lati sono numeri interi. Si dimostri che in ogni triangolo rettangolo pitagorico il raggio del cerchio inscritto ha lunghezza pari a un numero intero.

Problema 77 *
Si consideri un triangolo ABV isoscele sulla base AB. Si costruiscano esternamente sui lati obliqui due poligoni regolari di n lati. Siano V' e V'' rispettivamente il vertice più vicino a V del poligono costruito su AV (vertice diverso da A) e il vertice

[31] Rivista americana nata nel 1901 e tuttora attiva.
[32] Rivista americana di matematica ricreativa; è stata pubblicata dal 1968 al 2014.
[33] Si veda la nota al Problema 20. Ringrazio Alex Letizia per avermi suggerito questo problema.

più vicino a V del poligono costruito su BV (vertice diverso da B). Si dimostri che l'ampiezza degli angoli $\widehat{ABV'}$ e $\widehat{V''AB}$ è indipendente dalla distanza del punto V da AB, e si trovi un'espressione per tale ampiezza (in gradi) in funzione del numero n dei lati dei poligoni[34].

Problema 78 *** (*Olimpiadi nazionali Brasile, 2014*)
Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso; le sue diagonali AC e BD si incontrano in un punto P. I raggi delle circonferenze inscritte in ABP, BCP, CDP e DAP sono congruenti. Dimostrare che $ABCD$ è un rombo.

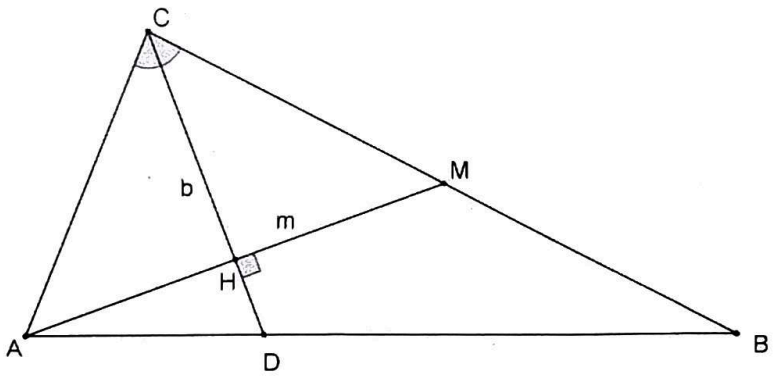
Problema 79 * (*Olimpiadi della matematica, semifinale nazionale a squadre, 2013*)
Radice, ancora sorpresa per quello che sta succedendo, esce di casa, e si ritrova a camminare in un prato fiorito infinitamente lungo e largo 100 cm. Sul prato la osservano tanti fiori, stupiti dal vedere un fiore che si muove! Ognuno di essi ha la forma di un poligono regolare di petalo, oops, lato 1 cm. Quanti petali/lati ha il fiore più grande che Radice può incontrare nel prato?

Problema 80 *
Si considerino tre circonferenze C_1, C_2 e C_3 tangenti esternamente a due a due, aventi raggi r_1, r_2 ed r_3 e centri A, B e C. Il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che la circonferenza contenente C_1, C_2 e C_3 e tangente a tutte e tre ha raggio $r_1 + r_2 + r_3$.

[34] Un caso particolare di questo problema, con due quadrati costruiti sui lati obliqui del triangolo, è stato proposto alla finale nazionale della gara Kangourou della matematica nel 2015.

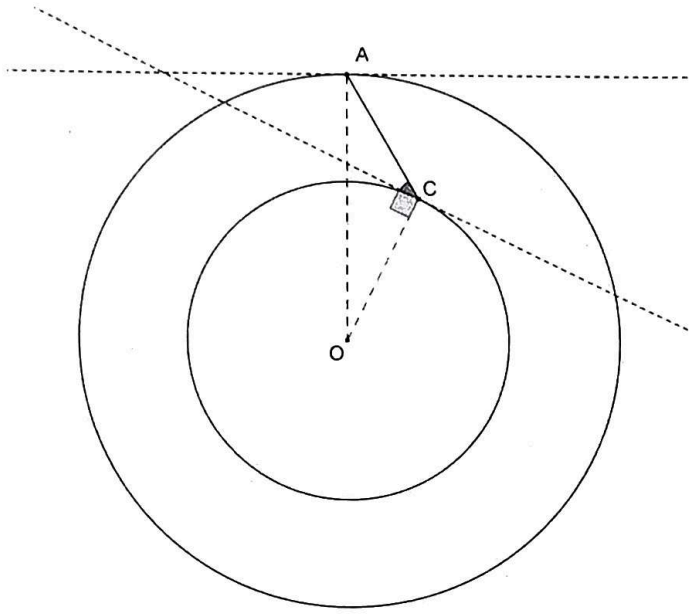
15. Soluzioni

Soluzione al Problema 1



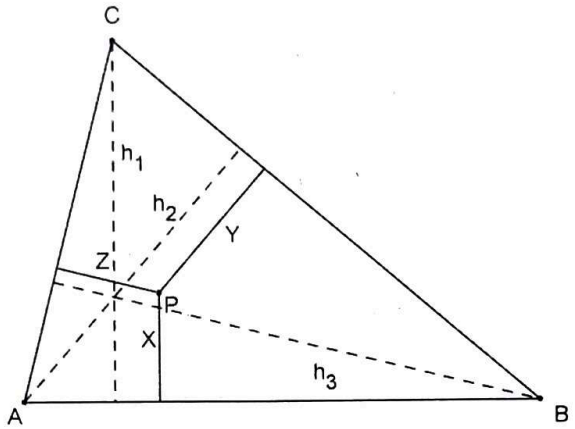
Sia $AM = m = 8$ la mediana relativa al lato BC e $CD = b = 7$ la bisettrice uscente dal vertice C, e sia H il loro punto di intersezione. Nel triangolo AMC il segmento CH è contemporaneamente altezza e bisettrice: pertanto AMC è isoscele sulla base AM (Teorema 5.9). Ma M è il punto medio di BC, quindi $BC = 2AC$. Ora è possibile calcolare l'area del triangolo ADC, che, sulla base $CD = 7$, ha altezza $AH = \frac{1}{2}m = 4$: la sua area vale 14. Ma per il Teorema della bisettrice (Teorema 5.6) il segmento DB è il doppio di AD. L'area del triangolo DBC è dunque doppia di quella di ADC, perché la sua base $DB = 2AD$ e l'altezza (rispetto a tale base) è la medesima. In conclusione l'area di DBC è 28 e l'area totale è 42: la risposta è la *c*. □

Soluzione al Problema 2



Il segmento indicato in figura con AC rappresenta il primo tratto percorso da Desargo; l'angolo formato da AC e dalla retta tangente alla circonferenza esterna vale 63°; l'angolo fra AC e la tangente alla circonferenza interna è invece di 34°. Pertanto $\widehat{ACO} = 90° + 34° = 124°$ (si ricordi che l'angolo fra CO e la tangente è retto, Lemma 3.10). Ma $\widehat{CAO} = 90° - 63° = 27°$, perciò l'angolo al centro $\widehat{AOC} = 29°$ (per il Teorema 3.2). Il cane, una volta arrivato in C, può muoversi solo "lungo segmenti appartenenti a rette la cui distanza dal centro del cortile è sempre la stessa"; quindi o torna indietro, ma in tal caso ripassa per un punto già percorso, e si ferma. Oppure prosegue su un segmento simmetrico di AC simmetrico rispetto a OC, che formerà simmetricamente gli stessi angoli con le tangenti alle due circonferenze. Continuando in questo modo, Desargo cambia direzione ogni volta che ha descritto un angolo al centro di 29 gradi. Quando avrà cambiato direzione 11 volte, avrà percorso 12 segmenti, quindi avrà descritto $29° \cdot 12 = 348°$. In questo modo non è mai ripassato due volte per uno stesso punto; al successivo segmento (il tredicesimo), tocca nuovamente la circonferenza interna. Dopo il tredicesimo cambio di direzione, il quattordicesimo segmento interseca sicuramente il primo (AC); Desargo ripassa quindi per un punto in cui è già passato, e si ferma. In conclusione il numero di cambi di direzione è al massimo 13, che è la risposta cercata. □

Soluzione al Problema 3



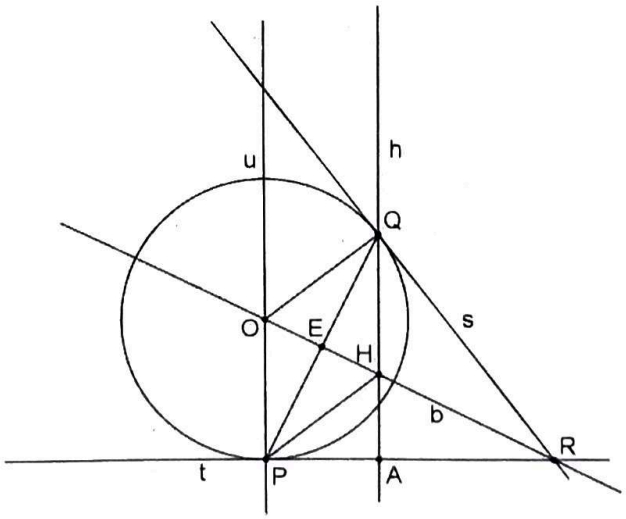
L'area $\mathcal{A}$ di ABC può essere calcolata come $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(AB \cdot X + BC \cdot Y + CA \cdot Z$ (cfr. Esempio 6.1). Se si divide tale uguaglianza per $\mathcal{A}$, si ottiene:

$$\frac{AB \cdot X}{2\mathcal{A}} + \frac{BC \cdot Y}{2\mathcal{A}} + \frac{CA \cdot Z}{2\mathcal{A}} = 1\,.$$

Ma $2\mathcal{A}/AB = h_1$, $2\mathcal{A}/BC = h_2$, $2\mathcal{A}/CA = h_3$; pertanto l'uguaglianza precedente diventa $X/h_1 + Y/h_2 + Z/h_3 = 1$, che è quanto si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 4

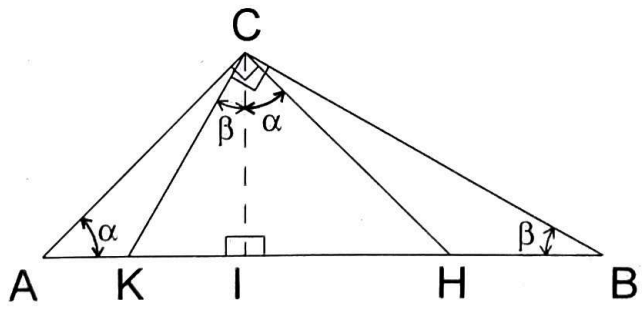
Innanzitutto si osservi che Q non può essere diametralmente opposto a P altrimenti la tangente s alla circonferenza γ per il punto Q non incontra t. Si tracci ora la retta u per P e per il centro O di γ, si conduca quindi per Q la parallela h a u fino ad incontrare t in A e si tracci la retta $b = OR$.



Dato che la retta b passa per il centro O, necessariamente taglia perpendicolarmente il segmento PQ nel suo punto medio E (Lemma 3.10). A questo punto si distinguono tre casi in base alla lunghezza del segmento QA. Se $QA > r$ siamo nella situazione rappresentata nella precedente figura e l'ortocentro H di PQR, intersezione delle rette b e h, è interno al triangolo (Lemma 5.8). Si osservi che PQH è isoscele, essendo EH mediana ed altezza relativa alla base PQ (Teorema 5.9), quindi $PH = QH$. I triangoli QHE e OPE sono congruenti, avendo angoli opposti al vertice E congruenti, angoli in Q e P congruenti poiché alterni interni (Teorema 3.5) ed essendo inoltre $EQ = EP$, come detto poc'anzi. Ne consegue che $QH = OP$ e, per la proprietà transitiva delle congruenze, $PH = OP$, come volevasi dimostrare (si osservi che il quadrilatero $PHQO$ è un rombo).
Nel secondo caso si ha $QA = r$. La tesi qui è immediatamente dimostrata: infatti PQR risulta rettangolo isoscele con l'ortocentro H coincidente con R (Lemma 5.8).
Nel terzo caso, in cui si ha $QA < r$, l'ortocentro H cade fuori dal triangolo (si veda il Lemma 5.8). La tesi si dimostra qui con ragionamenti analoghi a quelli del primo caso. Si osservi che al variare di Q il punto H descrive una circonferenza di centro P e raggio r privata dei due punti che cadono sulla retta u. □

Soluzione al Problema 5

Sia I la proiezione di C su AB e si indichino con a e b, rispettivamente, le lunghezze dei segmenti BC e AC. Si osservi che $\widehat{ICK}$ è complementare di $\widehat{ICB}$, pertanto $\widehat{ICK} = \beta$; analogamente si prova che $\widehat{HCI} = \alpha$.



Ne consegue che $\widehat{HCK} = \alpha+\beta$, e quindi è supplementare ad $\widehat{ACB} = \gamma = \pi-(\alpha+\beta)$; si avrà allora che $\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(\widehat{HCK})$. Considerando i triangoli rettangoli BCK e ACH, si ottengono

$$CK = a\operatorname{tg}\beta \quad , \quad CH = b\operatorname{tg}\alpha\,,$$

e il rapporto tra le aree (Teorema 12.1) può scriversi

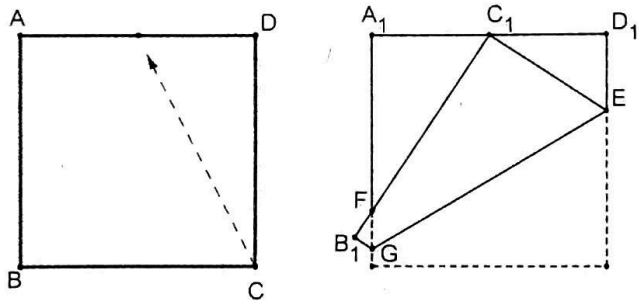
$$\frac{\mathcal{A}(HCK)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}CK \cdot CH \operatorname{sen} \widehat{HCK}}{\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \widehat{HCK}} .$$

Infine, tenuto conto delle relazioni tra angoli e segmenti ricavate precedentemente,

$$\frac{\mathcal{A}(HCK)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{b \operatorname{tg}\beta \cdot a \operatorname{tg}\alpha}{ab} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta ,$$

che è quanto si voleva dimostrare. □

Soluzione al Problema 6

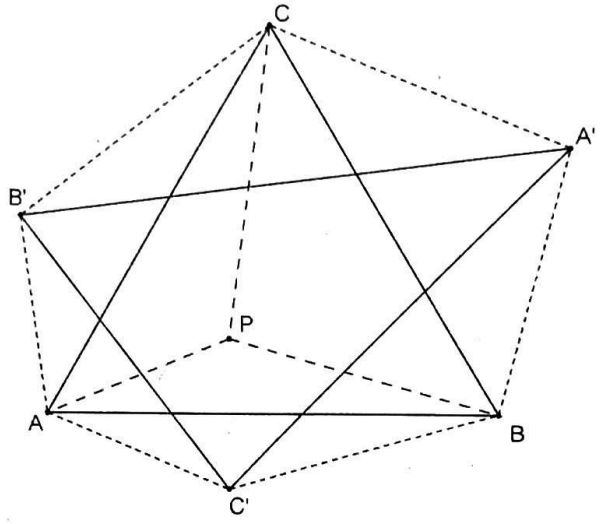


L'area incognita, nella parte a destra della figura, è il quadrilatero EC_1FG. Si ricordi che $A_1C_1 = C_1D_1 = 24/2 = 12$; e che $B_1C_1 = 24$ perché lato del quadrato. Se si indica con x il segmento D_1E, si avrà che $C_1E = 24 - x$; è pertanto possibile usare il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) per calcolare x: $12^2 + x^2 = (24 - x)^2$. Con facili passaggi si ottiene che $D_1E = 9$ e che $C_1E = 15$. Ora, per il Primo criterio di similitudine (Teorema 4.3), i triangoli D_1C_1E e C_1A_1F sono simili: sono infatti ambedue rettangoli, e hanno due angoli congruenti: $\widehat{FC_1A_1} = 180° - 90° - \widehat{D_1C_1E}$ e di conseguenza $\widehat{FC_1A_1} = \widehat{C_1ED_1}$. I lati dei due triangoli sono dunque in proporzione (Teorema 4.1): si ottiene che $A_1F = 16$ e che $FC_1 = 20$. Sempre per il primo criterio, anche i triangoli FB_1G e C_1A_1F sono simili: sono infatti ambedue rettangoli e hanno gli angoli $\widehat{C_1FA_1}$ e $\widehat{GFB_1}$ congruenti perché opposti al vertice. Ma, come detto, $B_1C_1 = 24$, da cui $B_1F = 24 - 20 = 4$; quindi, sempre istituendo una proporzione, $B_1G = 3$. Ora l'area del quadrilatero incognito EC_1FG si può ricavare agevolmente per differenza fra l'area del trapezio rettangolo C_1B_1GE e quella del triangolo rettangolo FB_1G:

$$\frac{(EC_1 + B_1G) \cdot C_1B_1}{2} - \frac{FB_1 \cdot B_1G}{2} = \frac{(15+3) \cdot 24}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} =$$
$$= 216 - 6 = 210 ;$$

l'area cercata vale pertanto 210. □

Soluzione[1] al Problema 7



Si proceda tracciando i punti A', B' e C', simmetrici di P rispetto alle rette BC, CA e AB, nell'ordine; si ottiene così l'esagono $AC'BA'CB'$. Si proceda ora usando un *double counting*: l'area dell'esagono è doppia di quella del triangolo ABC perché il triangolo BCA' è congruente a BCP, mentre CAB' è congruente a CAP e ABC' è congruente ad ABP. Pertanto tale area vale $l^2\sqrt{3}/2$. Si osservi che gli angoli dell'esagono $\widehat{A'CB'}$, $\widehat{B'AC'}$ e $\widehat{C'BA'}$ valgono 120° per costruzione: sono infatti stati ottenuti raddoppiando gli angoli in A, B e C del triangolo ABC. I lati dell'esagono, sempre per costruzione, hanno le seguenti lunghezze: $B'A = AC' = 3$; $C'B = BA' = 4$; $A'C = CB' = 5$. Si possono calcolare allora i lati del triangolo $A'B'C'$ col Teorema del coseno (Teorema 12.5): $A'B' = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos 120°} = 5\sqrt{3}$; allo stesso modo $B'C' = 3\sqrt{3}$ e $C'A' = 4\sqrt{3}$. Il triangolo $A'B'C'$, avendo i lati che rispettano il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1), è rettangolo, e la sua area vale $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 18$. L'area totale dell'esagono $AC'BA'CB'$ si può a questo punto ricalcolare sommando l'area, appena trovata, di $A'B'C'$, alle aree di $A'CB'$, $B'AC'$ e $C'BA'$; queste si calcoleranno per via trigonometrica, tramite il Teorema 12.1: $\mathcal{A}(A'CB') = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \sin 120° = \frac{25}{4}\sqrt{3}$; similmente, $\mathcal{A}(B'AC') = \frac{9}{4}\sqrt{3}$ e $\mathcal{A}(C'BA') = \frac{16}{4}\sqrt{3}$. In conclusione, eguagliando i due risultati ottenuti per l'area dell'esagono $AC'BA'CB'$:

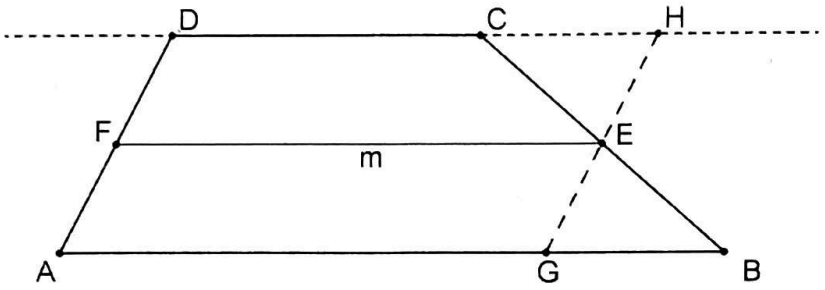
$$l^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 + \frac{25}{4}\sqrt{3} + \frac{16}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3},$$

da cui si ricava $l = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$. □

[1] La soluzione ricalca fedelmente quella proposta da Engel 1998, pag. 315.

Soluzione al Problema 8

Nel trapezio $ABCD$ siano E, F i punti medi di BC e DA; si tracci la parallela a DA passante per E. G è il punto di intersezione con la base AB, H col prolungamento della base CD.



I triangoli GBE ed EHC sono congruenti, in quanto: $CE = EB$ (E punto medio di BC); $\widehat{GEB} = \widehat{CEH}$, opposti al vertice; $\widehat{ECH} = \widehat{EBG}$, alterni interni fra rette parallele (Teorema 3.5)[2]. Ne consegue che $CH = GB$; sia x la lunghezza di tali segmenti. Pertanto $FE = AB - x = CD + x$; a questo punto è elementare verificare che $AB + CD = 2FE$ e quindi $FE = \frac{AB+CD}{2}$.

I caso del trapezio suddiviso in due trapezi simili fra loro è il più immediato: siano H e I gli estremi del segmento parallelo alle basi che divide $ABCD$ nel modo previsto. Allora, per la similitudine, $AB : HI = HI : CD$; perciò $HI = \sqrt{AB \cdot CD}$, e HI è media geometrica fra le basi.

Terzo caso: il segmento NM divida il trapezio in due trapezi equiestesi. Siano h_1 l'altezza del trapezio $ABMN$ e h_2 l'altezza del trapezio $NMCD$. Vale dunque la relazione:

$$\frac{1}{2}(AB + DC)(h_1 + h_2) = (AB + NM) \cdot h_1 = (NM + DC) \cdot h_2 \,.$$

Si deducono facilmente le seguenti uguaglianze:

$$h_1 = \frac{(AB + DC)(h_1 + h_2)}{2(AB + NM)} \quad , \quad h_2 = \frac{(AB + DC)(h_1 + h_2)}{2(NM + CD)} \,.$$

Sommando si ottiene:

$$h_1 + h_2 = \frac{(AB + DC)(h_1 + h_2)}{2(AB + NM)} + \frac{(AB + DC)(h_1 + h_2)}{2(NM + CD)} \,,$$

e, semplificando,

$$1 = \frac{(AB + DC)}{2(AB + NM)} + \frac{(AB + DC)}{2(NM + CD)} \,.$$

[2]Secondo criterio di congruenza.

Si moltiplichi ora per $2(AB+NM)(NM+CD)$; l'uguaglianza diventa

$$2(AB+NM)(NM+CD) = (AB+DC)(NM+CD) + (AB+DC)(AB+NM)\,.$$

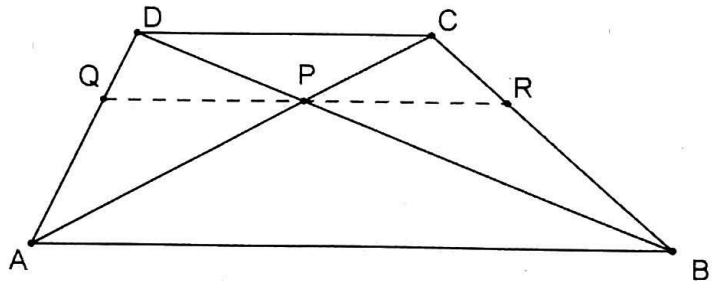
Svolgendo i calcoli e semplificando,

$$2MN^2 = AB^2 + DC^2\,,$$

da cui, infine,

$$MN = \sqrt{\frac{AB^2+DC^2}{2}}\,,$$

(media quadratica).
Nell'ultimo caso si considera il segmento passante per il punto d'incontro delle diagonali del trapezio.



Siano h_1 l'altezza del trapezio $ABRQ$ e h_2 l'altezza del trapezio $QRCD$. Tenendo presente che la somma delle aree dei trapezi $ABRQ$ e $QRCD$ fornisce l'area di $ABCD$, si può scrivere:

$$(AB+QR)h_1 + (QR+DC)h_2 = (AB+DC)(h_1+h_2)\,.$$

Si dimostra in modo elementare che i triangoli ABP e PCD sono simili per il Primo criterio di similitudine (Teorema 4.3). Per il Teorema 4.1, anche le altezze avranno lo stesso rapporto di similitudine dei lati; pertanto $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{AB}{CD}$, da cui si ricava

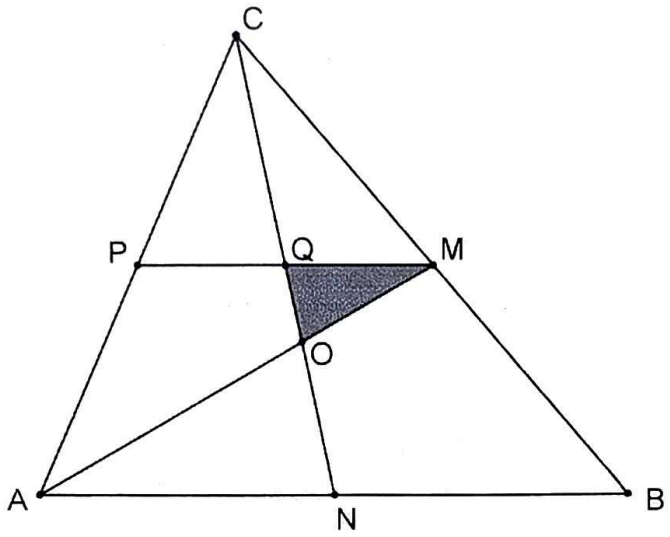
$$(AB+QR)\frac{AB}{CD}\cdot h_2 + (QR+DC)h_2 = (AB+DC)\left(\frac{AB}{CD}\cdot h_2 + h_2\right).$$

Semplificando per h_2 è svolgendo i calcoli si ottiene in breve che $QR(AB\cdot CD) = 2AB\cdot CD$, e infine

$$QR = \frac{2}{\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}}\,;$$

la lunghezza del segmento QR è quindi la media armonica fra le lunghezze delle basi del trapezio. □

Soluzione al Problema 9



Riconosciuto che il segmento MP è parallelo al segmento AB (Teorema 4.6), è evidente che i triangoli PMC e ABC risultano simili con rapporto di similitudine 2 (si veda il Teorema 4.1); si osserva quindi che l'area del triangolo ABC è 4 volte l'area del triangolo PMC. D'altronde la mediana CN è anche mediana del triangolo PMC, quindi divide quest'ultimo in due triangoli equivalenti aventi come basi i segmenti congruenti PQ e MQ e medesima altezza relativa (per il Lemma 5.4). Pertanto si è dimostrato che $\mathcal{A}(ABC) = 8 \cdot \mathcal{A}(QCM)$. Si osservi che grazie al Teorema del baricentro (Teorema 5.3) si ha che $OC = 2NO$; e che inoltre, ricordando il sopracitato parallelismo dei segmenti AB e PM, per il Teorema di Talete (Teorema 4.7) risulta $NQ = CQ$. Ne discende che

$$OQ = \frac{1}{2}NC - \frac{1}{3}NC = \frac{1}{6}NC$$

e $QC = \frac{1}{2}NC$, da cui si ottiene la relazione $QC = 3OQ$. Tenuto conto che i triangoli OQM e QCM hanno medesima altezza relativa alle basi OQ e QC, il rapporto tra le rispettive aree risulterà pari al rapporto tra le basi, quindi

$$\mathcal{A}(QCM) = 3 \cdot \mathcal{A}(OQM) = 3a\,.$$

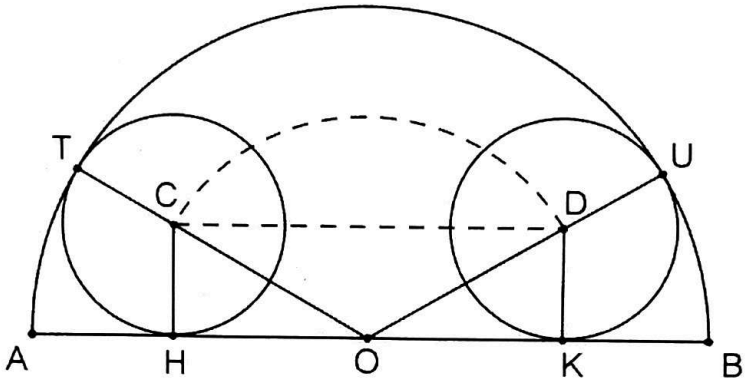
In conclusione, grazie alla relazione trovata precedentemente, risulta che

$$\mathcal{A}(ABC) = 8 \cdot \mathcal{A}(QCM) = 24a\,.$$

L'area di ABC è 24 volte l'area a. □

Soluzione al Problema 10

Si consideri la figura sotto riportata e si osservi innanzitutto che la regione descritta dalla moneta è racchiusa dall'arco TU di raggio $3r$, dagli archetti TH e UK di raggio r e dal segmento HK.



Dalla condizione di tangenza tra semicerchio e circonferenza segue che i punti T, C, O sono necessariamente allineati tra loro (Lemma 3.10); inoltre per lo stesso motivo il raggio CH deve essere ortogonale al diametro AB. Pertanto, il triangolo COH è rettangolo; l'ipotenusa ha lunghezza $CO = TO - TC = 2r$ e uno dei cateti è $CH = r$, e quindi COH è metà di un triangolo equilatero. Per simmetria, analogo ragionamento può essere fatto per ODK. Gli angoli $\widehat{TCH}$, $\widehat{UDK}$ e $\widehat{TOU}$ sono dunque congruenti con ampiezza pari a 120°. La regione descritta dalla moneta può essere scomposta come somma del settore circolare TOU di ampiezza 120° e raggio $3r$, dei due settori TCH e UDK di ampiezza 120° e raggio r e dei due triangoli CHO e DKO; l'area di tale regione risulta:

$$\mathcal{A}_{\text{moneta}} = \frac{1}{3}\pi(3r)^2 + \frac{2}{3}\pi r^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 = \frac{11}{3}\pi r^2 + \sqrt{3} r^2 \,.$$

La regione descritta dal centro della moneta (in figura con il contorno tratteggiato) può essere invece vista come differenza tra il settore COD di ampiezza 120° e raggio $2r$ e il triangolo CDO, quindi

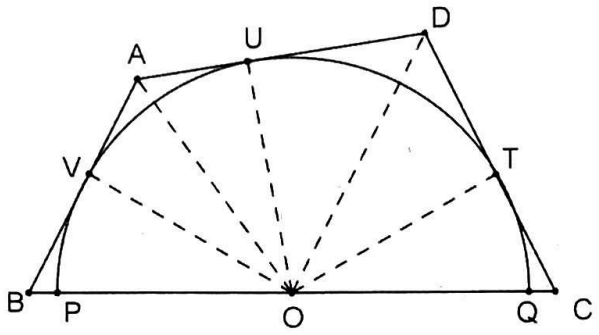
$$\mathcal{A}_{\text{centro}} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2 - \sqrt{3} r^2 \,.$$

L'area richiesta del problema è infine:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{moneta}} - \mathcal{A}_{\text{centro}} = \left(\frac{7}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right) r^2 \,;$$

con ciò il problema è concluso. □

Soluzione al Problema 11

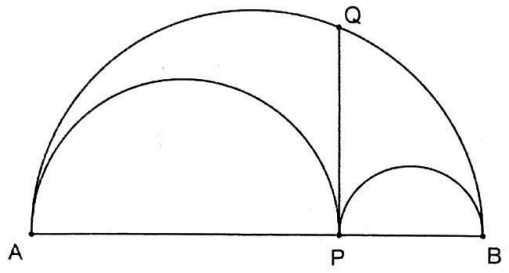


Dal centro O della semicirconferenza si traccino una serie di segmenti: OT, OU e OV condotti ai punti di tangenza, rispettivamente, di CD, DA e AB con la semicirconferenza; e OD, OA, che congiungono O con i vertici A e D del quadrilatero. Si osservi che gli angoli $\widehat{OVB}$, $\widehat{OUA}$, $\widehat{OTD}$ sono retti (Lemma 3.10). Se ne deduce immediatamente che i triangoli OVB e OCT sono congruenti: essi, infatti, sono entrambi rettangoli, hanno $OV = OT$ perché raggi, e $OB = OC$ per ipotesi. Ne consegue che gli angoli $\widehat{BOV}$ e $\widehat{TOC}$ sono congruenti. Si ponga allora $\gamma = \widehat{BOV} = \widehat{TOC}$. Ma anche gli angoli $\widehat{VOA}$ e $\widehat{AOU}$ sono congruenti (Teorema 3.1); si ponga $\alpha = \widehat{VOA} = \widehat{AOU}$; sempre per il Teorema 3.1, si porrà anche $\beta = \widehat{UOD} = \widehat{DOT}$. Ma l'angolo $\widehat{BOC}$ è piatto, quindi $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ e anche $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Nel triangolo VBO si ha che $\widehat{VBO} = 90° - \gamma$; nel triangolo VOA si ha che $\widehat{OAV} = 90° - \alpha$. Dunque gli angoli del triangolo OAB valgono $\alpha + \gamma$, $90° - \alpha$ e $90° - \gamma$. Il nostro obiettivo è ora dimostrare che il triangolo OCD ha i medesimi angoli di OAB (e quindi è simile a esso): in OCD si ha che $\widehat{DOC} = \beta + \gamma$, $\widehat{OCD} = 90° - \gamma$, $\widehat{CDO} = 90° - \beta$. Dalla relazione trovata poc'anzi, $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, si ottiene che:

$$\widehat{DOC} = \beta + \gamma = 90° - \alpha = \widehat{OAV};$$

questo è sufficiente per concludere che i triangoli OCD e OAB sono simili (Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3); è dunque possibile istituire una proporzione fra i loro lati: $AB : BO = OC : CD$. Se chiamiamo $BO = OC = x$ si ottiene $x^2 = AB \cdot CD = 16 \cdot 18 = 288$ e infine $x = 12\sqrt{2}$; la richiesta del problema era il lato BC, che vale $2x = 24\sqrt{2} \simeq 33,9408...$. La risposta era da fornire moltiplicata per 100, e corrisponde pertanto a 3394. □

Soluzione al Problema 12



Sia $r = AB/2$ il raggio della semicirconferenza di partenza. Detto x il segmento AP e $2r - x$ il segmento PB, diametri delle due semicirconferenze piccole, si ha che l'area dell'arbelo vale:

$$\mathcal{A}_{arbelo} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{2r-x}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{\pi(2r-x)^2}{8},$$

da cui, con facili passaggi,

$$\mathcal{A}_{arbelo} = \pi \cdot \frac{2rx - x^2}{4}.$$

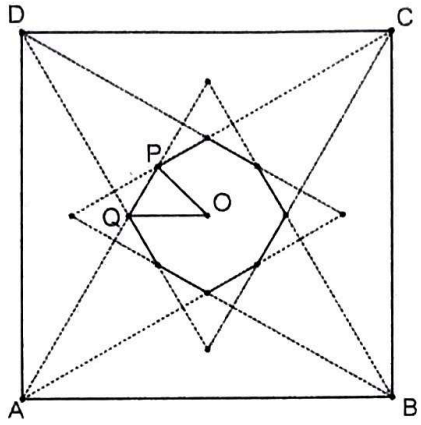
L'area del cerchio di diametro PQ si trova invece tenendo presente che il triangolo AQB è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza (Lemma 3.9). Pertanto la sua altezza relativa all'ipotenusa, PQ, può essere calcolata tramite il Secondo teorema di Euclide (Teorema 4.9): $PQ^2 = AP \cdot PB = x \cdot (2r - x)$. Il cerchio di diametro PQ, avente raggio $PQ/2$, ha quindi area:

$$\mathcal{A} = \pi\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = \pi\frac{x \cdot (2r-x)}{4} = \pi\frac{2rx - x^2}{4}.$$

Le due aree sono pertanto uguali, come si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 13

Si osservi che l'area richiesta è 8 volte l'area del triangolo OPQ (si veda la figura). Tale area si può ricavare in vari modi; uno dei più semplici consiste nell'usare la geometria analitica.



Si attribuisca, provvisoriamente, il valore 2 al lato del quadrato. In tal caso il punto O ha coordinate $(1, 1)$. La retta passante per P e per Q ha equazione $y = \sqrt{3}x$; la retta per Q e per O, $y = 1$; la retta per O e per P, $y = -x + 2$. Le coordinate di P e Q si trovano quindi come intersezione fra rette. Ne risulta che $P = (\sqrt{3} - 1, 3 - \sqrt{3})$, mentre $Q = (\sqrt{3}/3, 1)$. La base QO del triangolo è pertanto lunga $1 - \sqrt{3}/3$; la sua altezza varrà invece $3 - \sqrt{3} - 1 = 2 - \sqrt{3}$. L'area dell'ottagono sarà dunque pari a:

$$\mathcal{A} = 8 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(2 - \sqrt{3}) = \frac{4}{3}(9 - 5\sqrt{3})\,.$$

Per trovare l'area dell'ottagono nelle dimensioni indicate dal testo sarà ora sufficiente fare una proporzione: infatti, nelle unità considerate, l'area del quadrato è 4, mentre deve essere $450+250\sqrt{3} = 50(9 + 5\sqrt{3})$. Si applicherà allora la seguente:

$$4 : [50(9 + 5\sqrt{3})] = \frac{4}{3}(9 - 5\sqrt{3}) : x\,,$$

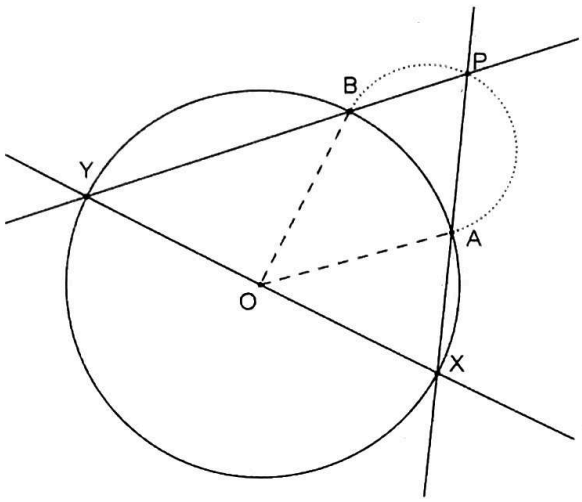
da cui, con facili calcoli, $x = 100$. □

Soluzione al Problema 14

Sia P il punto di intersezione fra AX e BY. I punti A e B sono dunque fissi, mentre varia il diametro XY: nel caso in cui i punti A e X vengano a coincidere, la retta AX sarà la tangente alla circonferenza per il punto; allo stesso modo avverrà per B e Y coincidenti.

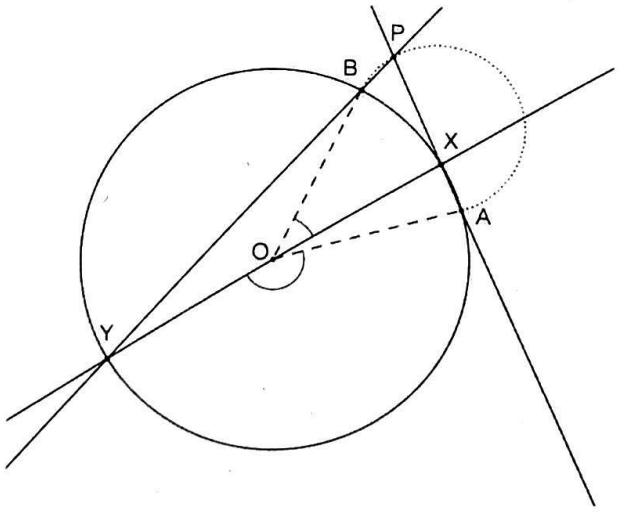
Il problema va affrontato esaminando le possibili configurazioni.

- Caso 1: se i punti si presentano sulla circonferenza nell'ordine X, A, B, Y (ad esempio in senso antiorario), il punto P è esterno alla circonferenza, come indicato nella seguente figura:



Possiamo in questo caso sfruttare il risultato ottenuto nell'Esempio 3.5: infatti risulta che l'angolo $\widehat{APB}$ è congruente alla semidifferenza fra gli angoli $\widehat{XOY}$ (dalla parte opposta rispetto ad A e B) e $\widehat{BOA}$; ma $\widehat{XOY}$ è costante, perché è un angolo piatto, e anche $\widehat{BOA}$ non varia in quanto A e B sono fissati. Pertanto anche $\widehat{APB} = (\widehat{XOY} - \widehat{BOA})/2$ (si veda appunto l'Esempio 3.5) è costante. Si ha allora che i punti P, al variare della posizione del diametro XY, "vedono" il segmento AB sotto un angolo costante: ciò è sufficiente per concludere che essi appartengono a una circonferenza (Lemma 3.8).

- Caso 2: se i punti si presentano nell'ordine A, X, B, Y, P risulta ancora esterno alla circonferenza (si veda la figura seguente).

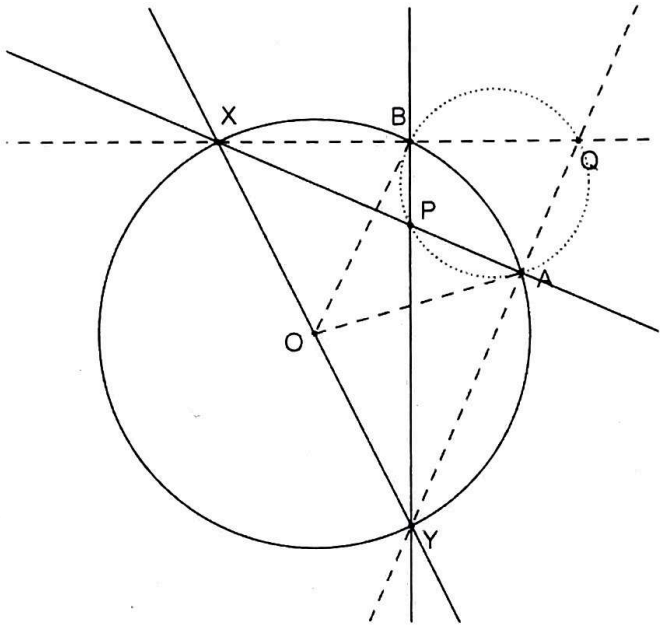


In tal caso è possibile utilizzare nuovamente il risultato trovato all'Esempio 3.5, ma questa volta riferendosi all'arco XB e non all'arco AB. Risulta infatti che $\widehat{APB} = (\widehat{YOA} - \widehat{BOX})/2$. Ma $YOA = 180° - XOA$ e $XOA + BOX = BOA$, dove BOA è fisso perché fissi sono A e B. la relazione precedente diventa quindi:

$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{YOA} - \widehat{BOX}}{2} = \frac{180° - \widehat{XOA} - (\widehat{BOA} - \widehat{XOA})}{2},$$

da cui dunque $\widehat{APB} = (180° - \widehat{BOA})/2$, e APB è ancora costante, e congruente all'angolo trovato al caso precedente. Pertanto P appartiene al medesimo arco di circonferenza.

- Caso 3: quando il punto X coincide con B, anche P coincide con X e B e quindi giace sulla circonferenza. Allo stesso modo, se Y coincide con A, anche P coincide con essi. Dunque sia A sia P appartengono al luogo. Se infine l'ordine dei punti è A, B, X, Y, il punto P è interno alla circonferenza.



Per esaminare questa configurazione si traccino ora le rette AY e BX. Sia Q il loro punto di intersezione: è facile rendersi conto che esso descrive lo stesso luogo esaminato per P al caso 1. Per concludere che P continua ad appartenere allo stesso luogo anche nel caso presente vogliamo dimostrare che il quadrilatero $AQBP$ è ciclico. Si noti che $\widehat{QBP}$ è un angolo retto, perché supplementare di $\widehat{PBX}$, che è a sua volta retto perché il triangolo YBX è inscritto in una semicirconferenza (Lemma 3.9). Per lo stesso motivo è retto l'angolo $\widehat{QAP}$; ne consegue che gli angoli $\widehat{BPA}$ e $\widehat{AQB}$ sono supplementari, e che $AQBP$ è ciclico (Teorema 9.1).

In conclusione, il luogo cercato è una circonferenza che ha il segmento AB come corda. Si osservi che il centro di tale luogo è sempre esterno alla circonferenza iniziale, e che il raggio del luogo cresce al crescere della lunghezza di AB. Se AB è un diametro, il luogo non esiste perché i segmenti AX e BY sono paralleli. □

Soluzione al Problema 15

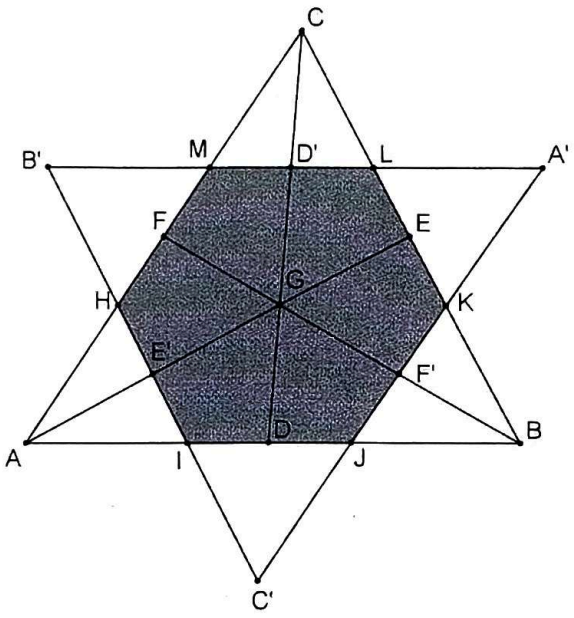
Il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza, quindi ad esso è applicabile la Formula di Brahmagupta (Lemma 9.4): $\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Pertanto il quadrato della sua area sarà $\mathcal{A}^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$. Dalla circoscrivibilità deriva un'equazione che lega la lunghezza dei lati: $a + c = b + d$

(Lemma 8.2). Ma dal momento che $2p = a + b + c + d$, è possibile, dalla precedente, ottenere che $p = a + c = b + d$. Sostituendo alternativamente p con $a + c$ oppure $b + d$, si ricava:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = \\ &= (a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d) = cdab\,,\end{aligned}$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 16



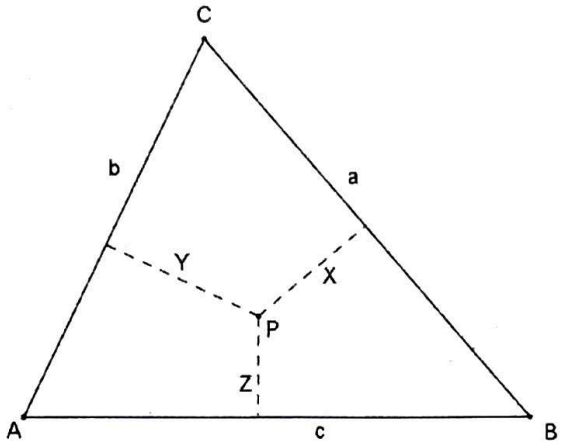
Dimostriamo, per iniziare, che l'area di ciascuno dei triangoli MLC, JBK, AIH è pari a 1/6 dell'area di ABC. Per il Teorema del baricentro (Teorema 5.3), $CG = 2GD$; ma per la simmetria della costruzione, $D'G = GD$. Ne consegue che $CD' = CD/3$. Evidentemente il triangolo MLC è simile al triangolo ABC (immediata applicazione del Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3), con rapporto di similitudine 1/3 (Teorema 4.1). Quindi l'area di MLC è 1/9 di quella di ABC; lo stesso risultato si ottiene per le aree di JBK e di AIH. In conclusione, l'area richiesta, quella dell'esagono $HIJKLM$, corrisponde a 2/3 dell'area di ABC. Quest'ultima si troverà con la Formula di Erone (Lemma 6.1):

$$\mathcal{A}_{HIJKLM} = \frac{2}{3}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{2}{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 56\,.$$

La risposta è dunque 56. □

Soluzione[3] al Problema 17

Siano, come da convenzione usuale, a, b e c le lunghezze dei lati opposti al vertice indicato con la stessa lettera.



Si consideri allora la Disuguaglianza AM-GM (Teorema 13.4) applicata alle tre grandezze ax, by e cz:

$$\frac{ax+by+cz}{3} \geq \sqrt[3]{ax \cdot by \cdot cz}\,.$$

L'uguaglianza vale solo se i tre termini sono congruenti, cioè quando $ax = by = cz$. In virtù del Lemma 1.1, $ax + by + cz = 2\mathcal{A}$, con $\mathcal{A}$ area di ABC. Quindi si ottiene che, sotto la condizione $ax = by = cz$,

$$\frac{8\mathcal{A}^3}{27} = ax \cdot by \cdot cz\,,$$

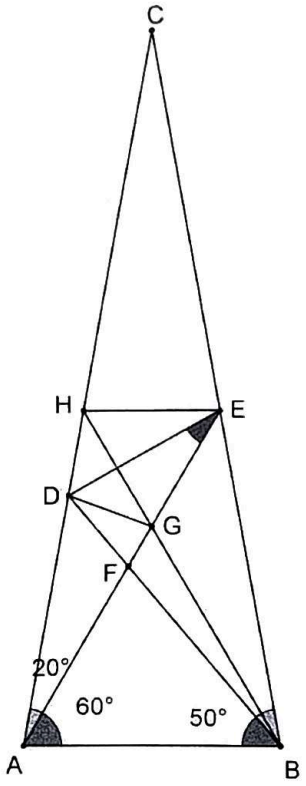
e

$$\mathrm{Max}(xyz) = \frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}\,.$$

Una volta individuato il valore del massimo, si tratta ora di stabilire per quale posizione di P esso si ottenga. Dimostreremo che $ax = by = cz$ se e solo se P è il baricentro. Prima implicazione: sia P il baricentro. Le mediane dividono il triangolo ABC in sei triangoli equiestesi (Lemma 5.4): pertanto i triangoli PAB, PBC e PCA sono equiestesi (ciascuno di essi equivale a due dei triangoli previsti dal Lemma 5.4), da cui segue che $ax = by = cz$. Si esamini l'implicazione opposta: sia P un punto interno al triangolo tale che $ax = by = cz$. Si consideri la prossima figura, in cui il segmento CP interseca AB in K.

[3]La dimostrazione qui riportata si discosta, nella seconda parte (condizione necessaria e sufficiente) da quella di Larson 1983.

Soluzione[5] al Problema 20



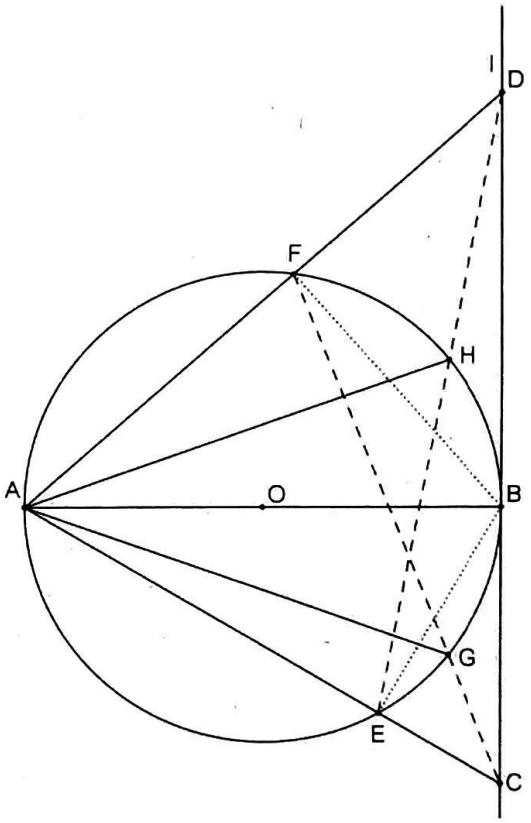
Si ha $\widehat{ADB} = 180° - \widehat{BAD} - \widehat{DBA} = 180° - 80° - 50° = 50°$ (Teorema 3.2) e, di conseguenza, essendo $\widehat{ADB} = \widehat{DBA} = 50°$, il triangolo ADB è isoscele sulla base DB e pertanto $DA = AB$.
Si prenda ora il punto $G \in AE$ tale che $\widehat{GBA} = \widehat{BAF} = 60°$. Il triangolo ABG è equilatero e quindi $AB = AG$. Essendo anche $AB = AD$, per transitività $AG = AD$ e pertanto il triangolo ADG è isoscele sulla base DG. Ne segue che $\widehat{ADG} = \widehat{DGA} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{GAD}) = 80°$.
Prolunghiamo BG dalla parte di G e sia H il punto di intersezione di tale prolungamento con AC. Consideriamo i triangoli AGH e BEG. Essi hanno $AG = BG$ (lati del triangolo equilatero ABG), $\widehat{GAH} = \widehat{EBG}$ (entrambi hanno ampiezza 20°) e $\widehat{BGE} = \widehat{HGA}$ (opposti al vertice), quindi sono congruenti. Di conseguenza $GE = GH$ ed essendo $\widehat{EGH} = \widehat{AGB} = 60°$, il triangolo HEG è equilatero. Si ottiene che $HE = EG$ e $\widehat{GEH} = 60°$. Osserviamo adesso che $\widehat{HGD} = 180° - \widehat{DGA} - \widehat{EGH} = 180° - 80° - 60° = 40°$ (Teorema 3.2) e dunque, per il Teorema dell'angolo esterno (Teorema 3.4) applicato al triangolo HDG, si ha pure $\widehat{AHG} = \widehat{ADG} - \widehat{HGD} = 80° - 40° = 40°$. Il triangolo HDG risulta allora isoscele sulla base HG e quindi $DG = DH$. Si considerino, infine, i triangoli

[5] Questa dimostrazione è stata scritta da Salvatore Damantino.

DEH e DGE: per quanto mostrato sopra essi hanno $DH = DG$, $GE = HE$, DE in comune, e pertanto sono congruenti[6]. Di conseguenza DE è la bisettrice dell'angolo $\widehat{GEH}$, che come visto prima è di 60°; l'angolo richiesto è $\widehat{DEG} = 30°$. □

Soluzione al Problema 21

Si osservi, per iniziare, che i triangoli ABF e AEB sono rettangoli in quanto inscritti in una semicirconferenza (Lemma 3.9). Pertanto il segmento FB è altezza relativa all'ipotenusa nel triangolo rettangolo ABD (si ricordi infatti che il diametro AB è perpendicolare alla retta tangente l, Lemma 3.10); allo stesso modo, BE è altezza relativa all'ipotenusa nel triangolo ACB.



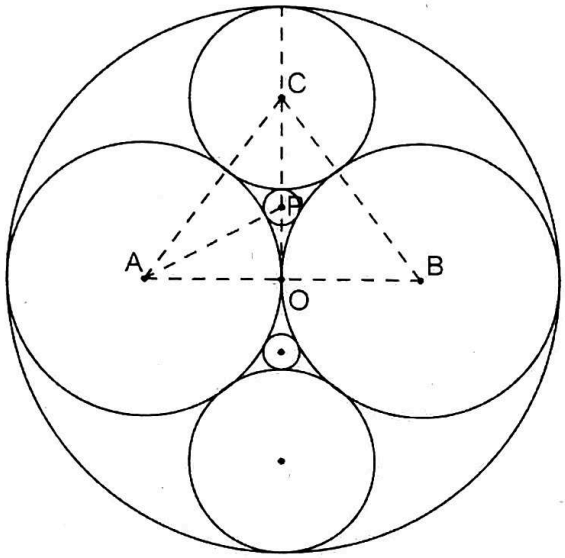
Si può quindi applicare il Primo teorema di Euclide (Teorema 4.8). Valgono allora le seguenti: $AB^2 = AD \cdot AF$ e $AB^2 = AC \cdot AE$; associando le due uguaglianze si ha che $AD \cdot AF = AC \cdot AE$. Ciò è sufficiente per concludere che i punti E, C, D, F sono conciclici (Teorema 10.2). Nella circonferenza passante per E, C, D, F, risulta che i due angoli $\widehat{DFC}$ e $\widehat{DEC}$ sono angoli alla circonferenza che insistono sulla medesima corda (CD): pertanto sono congruenti (Teorema 3.7). Si costruiscano le seguenti relazioni: $\widehat{HAB} = \widehat{HEB}$ (di nuovo per il Teorema 3.7, relativamente alla corda BH); e similmente $\widehat{BAG} = \widehat{BFG}$ (Teorema 3.7 per la

[6]Terzo criterio di congruenza.

corda BG). Ma $\widehat{HEB} = \widehat{DEC} - 90°$ (si ricordi che BE è perpendicolare ad AC), e anche $\widehat{BFG} = \widehat{DFC} - 90°$. Essendo differenza di angoli a due a due congruenti, si deduce che $\widehat{BFG} = \widehat{HEB}$, e infine che $\widehat{HAB} = \widehat{BAG}$. I due triangoli ABH e AGB sono allora congruenti, perché hanno il lato AB in comune e tutti e tre gli angoli congruenti[7]. In conclusione, $AH = AG$, come si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 22

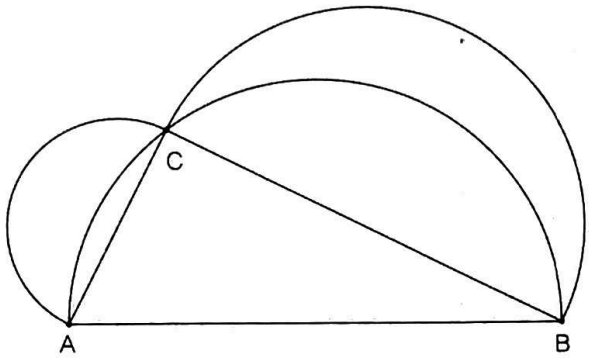
Il problema non è che una variante, più articolata, dell'Esempio 2.1; si svolge infatti con ripetute applicazioni del Teorema di Pitagora (Teorema 2.1).



Il segmento AB è lungo ovviamente 12 cm; pertanto i raggi AO e OB valgono 6. Detto R il raggio della circonferenza di centro C (e della sua simmetrica) e r il raggio della circonferenza di centro P, si hanno le seguenti relazioni: $AC = 6 + R$; $AP = 6 + r$; $CO = 12 - R$; $CO = PO + R + r$. Dalle ultime due, eliminando CO: $PO = 12 - 2R - r$. Come detto, si applica il Teorema di Pitagora al triangolo AOC: $(6 + R)^2 = 6^2 + CO^2$. Svolgendo i calcoli e semplificando, $12R + R^2 = CO^2$; inserendo ora la relazione trovata per CO, si ricava $12R + R^2 = (12 - R)^2$ da cui, agevolmente, $R = 4$. L'espressione diventa quindi $PO = 4 - r$. Si passi ad applicare il Teorema di Pitagora nel triangolo AOP: $(6 + r)^2 = 6^2 + PO^2$. Anche in questo caso si svolga e si inserisca il risultato ottenuto per PO: $12r + r^2 = 16 + r^2 - 8r$, e infine $20r = 16$ e $r = 4/5 = 0,8$ mm; in conclusione, il diametro richiesto è pari a 1,6 mm. □

[7] Secondo criterio di congruenza.

Soluzione al Problema 23



L'area totale della figura può essere vista in due modi: o come somma dell'area del semicerchio di partenza più le due lunule, oppure come somma del triangolo rettangolo ABC (si veda il Lemma 3.9) più i due semicerchi costruiti sui suoi cateti. Si inizi con il secondo punto di vista, dopo avere fissato $AC = 2b$, $BC = 2a$ e $AB = 2c$: l'area totale sarà

$$\mathcal{A}_{tot} = \frac{2a \cdot 2b}{2} + \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi b^2}{2} = 2ab + \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)\,.$$

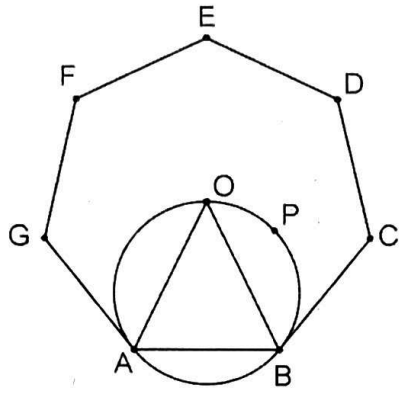
Passando ora alla considerazione che $\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_{semicerchio} + \mathcal{A}_{lunule}$ si potrà ottenere la somma delle aree delle lunule come $\mathcal{A}_{lunule} = \mathcal{A}_{tot} - \mathcal{A}_{semicerchio}$, e quindi:

$$\mathcal{A}_{lunule} = 2ab + \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) - \frac{\pi c^2}{2}\,; \qquad (1)$$

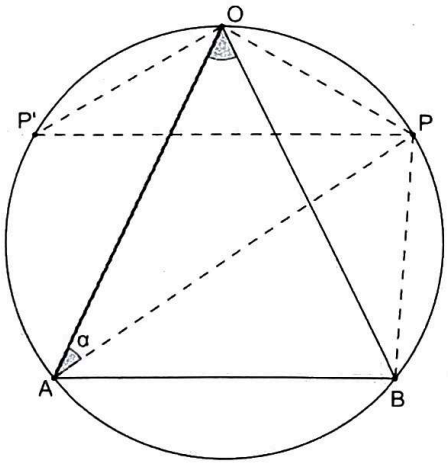
ma dal Teorema di Pitagora (Teorema 2.1), $(2c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$ e anche $c^2 = a^2 + b^2$. Pertanto gli ultimi due addendi della precedente uguaglianza (1) si annullano e $\mathcal{A}_{lunule} = 2ab$. L'area delle lunule eguaglia quindi l'area del triangolo ABC. □

Soluzione al Problema 24

Per iniziare dividiamo l'ettagono regolare in 7 triangoli isosceli congruenti, ciascuno di area 4095/7=585 m^2. Il triangolo ABO va inscritto a sua volta in una circonferenza; su tale circonferenza si traccia il punto P (dalla parte di B affinché sia $PA > PB$) che rispetti la condizione indicata; si deve quindi calcolare l'area del triangolo ABP.



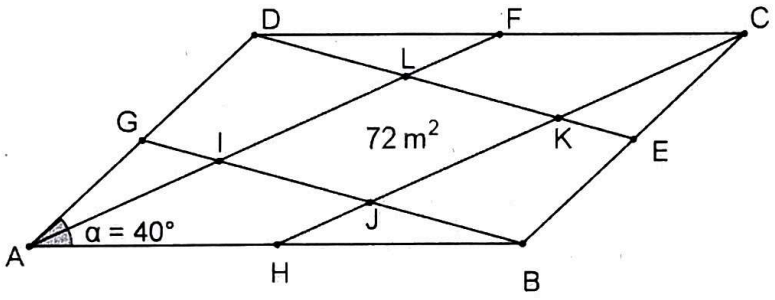
La condizione richiesta è $(PA-PB) : AB = 2 : 3$; applicando il Teorema di Tolomeo (Teorema 9.3) al quadrilatero $ABPO$, si ottiene: $PA \cdot OB = AB \cdot PO + AO \cdot PB$. Si osservi però che $AO = OB = k$ (il raggio della circonferenza circoscritta all'ettagono $ABCDEFG$).



Di conseguenza: $PA \cdot k = AB \cdot PO + PB \cdot k$. Con un paio di passaggi: $k(PA-PB) : AB = OP$, da cui $OP/k = \frac{2}{3}$, e quindi $OP = \frac{2}{3}k$. L'angolo $\widehat{AOB}$ è un settimo di angolo giro (si ricordi infatti che l'ettagono $ABCDEFG$ è regolare) e vale $2\pi/7$; ne consegue che l'altezza del triangolo AOB è $k \cdot \cos(\pi/7)$. L'area cercata è quella del triangolo ABP, che ha la medesima base di ABO (la cui area, come detto, è nota); l'obiettivo è pertanto quello di calcolare l'altezza di ABP.
Ciascuno dei due angoli alla base $\widehat{OAB}$ e $\widehat{ABO}$ vale $5\pi/14$ (Teorema 3.2); si tratta di angoli alla circonferenza che sottendono corde di lunghezza k. La corda OP, invece, che si è dimostrato che valere $\frac{2}{3}k$, è sottesa da un angolo α il cui valore si ricava grazie al Teorema dei seni (Teorema 12.4): $(\frac{2}{3}k)/\sin\alpha = k/\sin(5\pi/14)$, da cui $\sin\alpha = \frac{2}{3} \cdot \sin(5\pi/14)$. Disegniamo ora il triangolo $P'PO$, tracciando

$P'P$ parallela ad AB. $P'PO$ è isoscele sulla base $P'P$, ad ha angoli alla base $\widehat{OP'P}$ e $\widehat{P'PO}$ congruenti all'angolo α. Pertanto l'altezza del triangolo $P'PO$ è $OP\sin\alpha = \frac{2}{3}k \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin(5\pi/14) = \frac{4}{9}k \cdot \sin(6\pi/7)$. L'altezza h di ABP rispetto alla base AB è la differenza fra le altezze di ABO e di $P'PO$, e vale: $h = k \cdot \cos(\pi/7) - \frac{4}{9}k \cdot \sin(5\pi/14)$; ma, per una ben nota formula trigonometrica, essendo $\pi/7$ e $5\pi/14$ angoli complementari, $\sin(5\pi/14) = \cos(\pi/7)$. Quindi $h = k \cdot \cos(\pi/7) - \frac{4}{9}k \cdot \cos(\pi/7) = \frac{5}{9}k \cdot \cos(\pi/7)$. L'altezza del triangolo ABP è, in conclusione, pari a 5/9 di quella di ABO, che valeva infatti $k \cdot \cos(\pi/7)$; ma i due triangoli hanno in comune la base, perciò il rapporto fra le loro aree è 5/9 come quello fra le loro altezze. Infine, l'area di ABP è $\frac{5}{9} \cdot 585 = 5 \cdot 65 = 325$ m^2. □

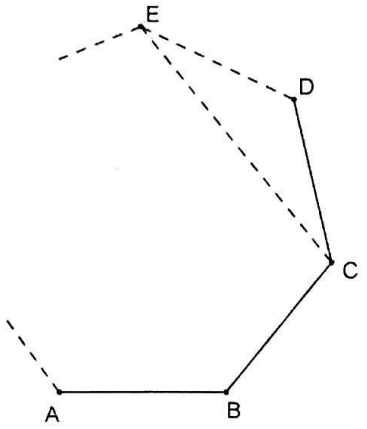
Soluzione al Problema 25



Secondo i dati del problema, il parallelogramma $IJKL$ ha area 72 m^2. Si inizi considerando il triangolo CJB: il segmento KE è parallelo al lato JB e il punto E è punto medio di BC. Ne consegue che K deve essere il punto medio di CJ (Teorema di Talete, 4.7). Si immagini ora di ruotare di 180° il triangolo CKE attorno al vertice E, fino a sovrapporre il segmento CE al segmento EB. La figura che si viene a formare è un parallelogramma di vertici J, B, K e K' (K' è il punto occupato da K dopo la rotazione): $JBK'K$ è evidentemente un parallelogramma, perché ha i lati opposti congruenti (Teorema 8.1). Infatti, per quanto appena dimostrato, $KK' = 2KE = JB$ e $JK = BK'$. I lati e gli angoli di $JBK'K$ sono congruenti con quelli di $IJKL$, pertanto essi sono congruenti e in particolare hanno la stessa area. Si può quindi ripetere il medesimo ragionamento e dimostrare che: la somma delle aree del trapezio $KCFL$ e del triangolo LFD è 72 m^2; la somma delle aree del trapezio $DGIL$ e del triangolo GAI è 72 m^2; la somma delle aree del trapezio $AHJI$ e del triangolo HBJ è 72 m^2. In conclusione, l'area del parallelogramma $ABCD$ è cinque volte l'area di $IJKL$, e vale 360 m^2. □

Soluzione al Problema 26

Sicuramente il poligono non può avere 4 lati, perché in questo caso sarebbe un quadrato e la relazione iniziale darebbe $1/AC = 0$ (essendo in questo caso $AB = AD$), il che è impossibile. Quindi esiste almeno un quinto vertice, che chiameremo E.

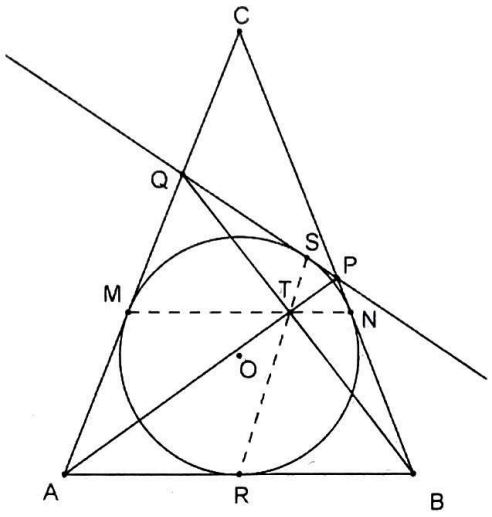


Riscriviamo la relazione di partenza come: $AC \cdot AD = AB \cdot AD + AB \cdot AC$. Il quadrilatero $ABCE$ è sicuramente ciclico, dato che A, B, C ed E sono vertici di un poligono regolare, inscrittibile in una circonferenza. Pertanto è possibile applicare ad $ABCE$ il Teorema di Tolomeo (Teorema 9.3): si ottiene $AC \cdot BE = AE \cdot BC + AB \cdot EC$. Si noti che $AB = BC$ perché lati di un poligono regolare; ma anche $AC = CE$ nonché $AD = BE$ perché AC e CE sono diagonali che lasciano fuori un solo vertice (a destra), mentre AD e BE sono diagonali che lasciano fuori due vertici (sempre a destra). La relazione ottenuta col Teorema di Tolomeo può essere così riscritta: $AC \cdot AD = AE \cdot AB + AB \cdot AC$; la relazione di partenza era invece $AC \cdot AD = AB \cdot AD + AB \cdot AC$. Il confronto fra le due porta a concludere che $AD = AE$, e dunque AD e AE devono essere diagonali dello stesso tipo; dal momento che AD si lascia a destra due vertici, mentre AE ne lascia a destra tre, è necessario allora che AE lasci due vertici *a sinistra*. Il poligono deve avere sette lati ed è cioè un ettagono. □

Soluzione[8] al Problema 27

a) Sia T_1 il punto di intersezione fra MN e QB; sia T_2 il punto di intersezione fra SR e QB. Si vuole dimostrare che i due punti coincidono. Si inizi con le seguenti osservazioni: $\widehat{T_1MQ} = \widehat{T_1NC}$ perché angoli alla base del triangolo isoscele MNC (si ricordi che, per evidenti motivi di simmetria, MN è parallelo ad AB; $\widehat{T_1NC} = 180° - \widehat{T_1NB}$ in quanto angoli adiacenti; $\widehat{MT_1Q} = \widehat{BT_1N}$ perché opposti al vertice).

[8]La laboriosa dimostrazione di questo problema segue pedissequamente quella proposta in "Bulgarian Mathematical Olympiads", testo liberamente reperibile in rete.



Si applichi ora il Teorema dei seni (Teorema 12.4) al triangolo MT_1Q:

$$\frac{QT_1}{\sin \widehat{T_1MQ}} = \frac{QM}{\sin \widehat{MT_1Q}};$$

con lo stesso teorema, nel triangolo BNT_1:

$$\frac{BN}{\sin \widehat{BT_1N}} = \frac{BT_1}{\sin \widehat{BNT_1}}.$$

Grazie alle relazioni tra angoli trovate prima, e tenendo conto che i seni di due angoli supplementari hanno lo stesso valore, si ha che $QT_1 : BT_1 = MQ : BN$. Se si ripete lo stesso ragionamento per il punto T_2, esso pure appartenente a MN, si arriverà a un'espressione analoga: $QT_2 : BT_2 = SQ : BR$. Ora, però, $MQ = SQ$ e $BR = BN$ perché segmenti di tangenza (Teorema 3.1); ne segue che $QT_1 : BT_1 = QT_2 : BT_2$, e perciò deve essere $T_1 = T_2$. Con ciò si è dimostrato che BQ passa per l'intersezione fra MN e SR; se si effettua la medesima dimostrazione per AP, si ottiene che AP, QB e MN concorrono, come si voleva dimostrare.

b) Si deve minimizzare la somma delle aree di ATQ e BTP. Si osservi che vale la seguente relazione: $\mathcal{A}_{ATQ} + \mathcal{A}_{BTP} = \mathcal{A}_{ABQ} + \mathcal{A}_{ABP} - 2\mathcal{A}_{ABT}$. Per quanto dimostrato al punto a), T varia su MN, che è parallelo ad AB; quindi la sua distanza da AB, che è pari all'altezza di ABT sulla base AB, è costante. Dunque $\mathcal{A}_{ABT}$=costante, e pertanto è sufficiente trovare il minimo di $\mathcal{A}_{ABQ} + \mathcal{A}_{ABP}$. Si proceda in questo modo (Teorema 12.1):

$$\mathcal{A}_{ABQ} = \frac{1}{2}AB \cdot AQ \sin \widehat{BAQ} \quad , \quad \mathcal{A}_{ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot BP \sin \widehat{ABN};$$

$\sin \widehat{BAQ} = \sin \widehat{ABN}$ perché angoli congruenti, alla base di un triangolo isoscele; ne segue che

$$\mathcal{A}_{ABQ} + \mathcal{A}_{ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot \sin \widehat{BAQ}(AQ + BP).$$

I fattori iniziali al termine di destra sono tutti costanti, pertanto la quantità da rendere minima è solo la somma $AQ + BP$. Si tenga presente che: $AQ = AM + MQ$, ma $MQ = QS$ (si veda al punto a); e $BP = BN + NP$ e $NP = SP$. Quindi $AQ + BP = AM + QS + BN + SP$; ovviamente $QS + SP = QP$, da cui $AQ + BP = AM + BN + QP$. A questo punto, $AM + BN$ è di nuovo una quantità costante, e rimane solo da rendere minima la lunghezza del segmento QP. Per ottenere il minimo di QP si consideri il triangolo OPQ, costruito congiungendo Q e P al centro O della circonferenza: esso ammette come altezza relativa alla base QP il segmento OS, che è perpendicolare a QP (Lemma 3.10); $OS = r$, dove r è il raggio della circonferenza inscritta. Da alcune elementari proprietà trigonometriche si ricava che $QP = r\left[\cot\widehat{PQO} + \cot\widehat{OPQ}\right]$. Nel quadrilatero $ABQN$ la somma degli angoli è: $2\widehat{QAB} + 2\widehat{PQO} + 2\widehat{OPQ} = 360°$ (Lemma 3.3); quindi $\widehat{PQO} + \widehat{OPQ} = 180° - \widehat{QAB}$. Proseguendo:

$$QP = r\left(\cot\widehat{PQO} + \cot\widehat{OPQ}\right) = r\left(\frac{\cos\widehat{PQO}}{\sin\widehat{PQO}} + \frac{\cos\widehat{OPQ}}{\sin\widehat{OPQ}}\right) =$$

$$= r\frac{\cos\widehat{PQO}\sin\widehat{OPQ} + \cos\widehat{OPQ}\sin\widehat{PQO}}{\sin\widehat{PQO}\sin\widehat{OPQ}}.$$

Il numeratore si trasforma con la formula per il seno della somma, il denominatore con la terza formula di Werner[9]; l'uguaglianza diventa:

$$QP = r\frac{\sin(\widehat{PQO} + \widehat{OPQ})}{\frac{1}{2}[\cos(\widehat{PQO} - \widehat{OPQ}) - \cos(\widehat{PQO} + \widehat{OPQ})}.$$

Dalla precedente relazione

$$\widehat{PQO} + \widehat{OPQ} = 180° - \widehat{QAB} \quad , \quad \sin(\widehat{PQO} + \widehat{OPQ}) = \sin\widehat{QAB}\,,$$

$$\cos(\widehat{PQO} + \widehat{OPQ}) = -\cos\widehat{QAB}\,.$$

Quindi:

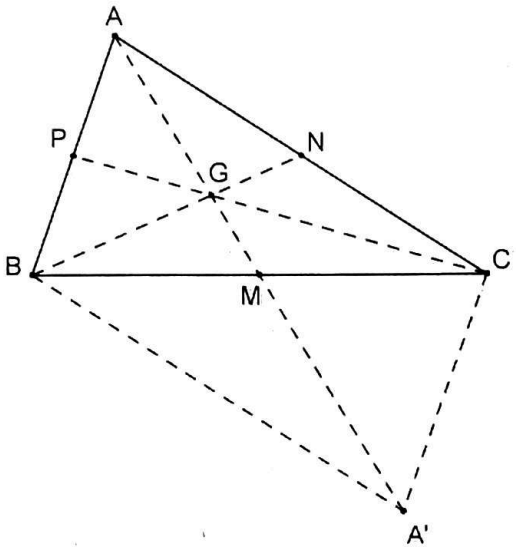
$$QP = r\frac{2\sin\widehat{QAB}}{\cos(\widehat{PQO} - \widehat{OPQ}) + \cos\widehat{QAB}}.$$

I termini $\sin\widehat{QAB}$ e $\cos\widehat{QAB}$ sono costanti perché l'angolo $\widehat{QAB}$ è fisso. Il minimo di QP si ottiene quando è massimo il valore di $\cos(\widehat{PQO} - \widehat{OPQ})$. Un coseno assume il suo valore massimo quando il suo argomento è nullo: nel caso presente quando $\widehat{PQO} = \widehat{OPQ}$, e cioè quando QP è parallelo alla base AB. □

[9] $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$.

Soluzione al Problema 28

Per prima cosa dimostreremo la seconda disuguaglianza. Si consideri la figura qui riportata, dove M è punto medio di BC ed A' è il simmetrico di A rispetto a M:

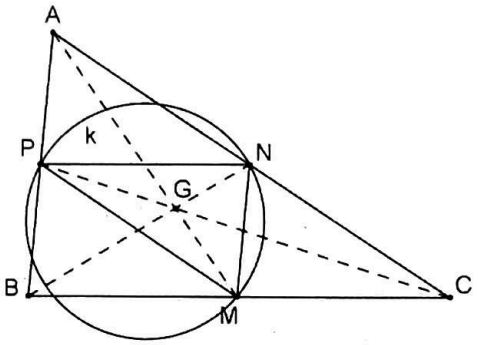


I triangoli AMC e BMA' sono congruenti in quanto $AM = MA'$ per costruzione, $\widehat{A'MB} = \widehat{AMC}$ perché opposti al vertice, e $BM = MC$ perché M è punto medio[10]. Dunque $BA' = AC$; considerato il triangolo ABA', vale in esso la Disuguaglianza triangolare (Teorema 13.1), e quindi $AA' = 2AM \leq AB + BA' = AB + AC$. Si è con ciò dimostrato che il doppio della mediana relativa a BC è minore o uguale alla somma degli altri due lati; con procedimento analogo si può dimostrare che ciò vale anche per le altre mediane. Infatti, $2AM \leq AB + AC$, $2BN \leq AB + BC$, $2CP \leq BC + AC$. Sommando termine a termine, $2(AM + BN + CP) \leq (AB + AC + AB + BC + BC + AC) = 2(AB + BC + AC)$; semplificando per 2, $AM + BN + CP \leq AB + BC + AC$.

Per dimostrare l'altra disuguaglianza, si ricordi che, in virtù del Teorema del baricentro (Teorema 5.3), la mediana resta divisa dal baricentro stesso in due segmenti di cui uno è doppio dell'altro. Quindi $AG = 2GM$, $BG = 2GN$, $CG = 2GP$. Nei triangoli ABG, GBC e GCA si applichi nuovamente la Disuguaglianza triangolare: si ricavano le tre disuguaglianze $AB \leq BG + GA = \frac{2}{3}BN + \frac{2}{3}AM$; $BC \leq CG + GB = \frac{2}{3}CP + \frac{2}{3}BN$; $CA \leq AG + GC = \frac{2}{3}AM + \frac{2}{3}CP$. Anche in questo caso si sommino termine a termine le disuguaglianze: il risultato è $AB+BC+CA \leq \frac{2}{3}BN+\frac{2}{3}AM+\frac{2}{3}CP+\frac{2}{3}BN+\frac{2}{3}AM+\frac{2}{3}CP = \frac{4}{3}(AM+BN+CP)$, espressione equivalente a quella che si doveva dimostrare. □

[10]Primo criterio di congruenza.

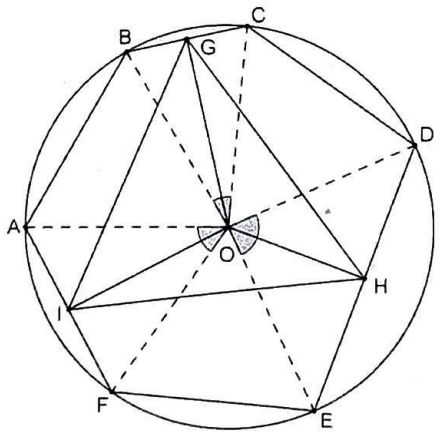
Soluzione al Problema 29



Si prenda il triangolo formato dai punti medi dei lati del triangolo ABC; esso è simile ad ABC, con rapporto di similitudine $1/2$ (Teorema 4.1); pertanto il raggio della circonferenza a esso circoscritta vale $R/2$. Tale circonferenza ha dei punti esterni al triangolo ABC, a meno che ABC non sia equilatero: perciò $R/2 \geq r$, e l'uguaglianza vale solo se ABC è equilatero. □

Soluzione[11] al Problema 30

Siano: $\widehat{BOC} = 2\alpha$, $\widehat{DOE} = 2\beta$, $\widehat{FOA} = 2\gamma$. Si ricordi che $\widehat{COD} = \widehat{EOF} = \widehat{AOB} = 60°$, da cui segue che $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ e che $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.



Senza alcuna perdita di generalità, si può porre $r = 1$. Quindi, in virtù di elementari proprietà trigonometriche, si ha che: $OG = \cos\alpha$; $OH = \cos\beta$; $OI = \cos\gamma$. Utilizzando il Teorema del coseno (Teorema 12.5) nei triangoli OHG e OIH è possibile calcolare i lati GH e HI:

$$GH^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta + 60°)\,,$$

[11] Questo problema si svolge in maniera rapida utilizzando i numeri complessi (e con questa strategia è risolto in Alexanderson, Klosinski, Larson 1985, pag. 56); dal momento che tale tecnica non è esposta nel presente testo, è qui proposta una soluzione che si serve solo di proprietà trigonometriche, ma è meno compatta ed elegante. Sul testo di Andy Liu (Liu 2001) sono illustrate sei soluzioni alternative del problema, a partire da pagina 123.

$$HI^2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta+\gamma+60°)\,.$$

Si usi ora il seguente artificio: si eguaglino le espressioni per GH^2 e HI^2; si badi bene che non è ancora stata dimostrata l'uguaglianza fra i lati GH e HI, e che questa risulterà vera solo se si otterrà un'identità. Il simbolo $\stackrel{?}{=}$ nelle prossime espressioni è quindi da intendersi come "si vuole dimostrare che il termine di sinistra è uguale a quello di destra". Procediamo:

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta+60°) \stackrel{?}{=} \cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta+\gamma+60°)\,.$$

Grazie alla formula di somma del coseno e ai noti valori del seno e del coseno di un angolo di 60°:

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\left[\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha+\beta)\right] \stackrel{?}{=}$$

$$\cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma\left[\frac{1}{2}\cos(\beta+\gamma) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\beta+\gamma)\right]\,.$$

Svolgendo i prodotti, applicando nuovamente le formule di somma sia per il seno, sia per il coseno, e semplificando una coppia di termini, si giunge alla seguente:

$$\cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \stackrel{?}{=} \cos^2\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\,.$$

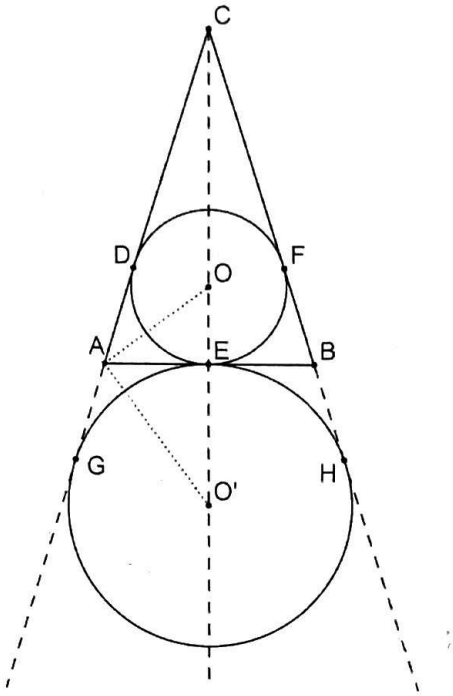
Ma dall'uguaglianza $\alpha+\beta+\gamma = 90°$ si ricava $\cos\beta = \sin(\alpha+\gamma)$. Svolgendo ancora una volta la formula di somma del seno, e semplificando, si ottiene

$$\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\gamma \stackrel{?}{=} \cos^2\gamma - \cos^2\gamma\sin^2\alpha\,,$$

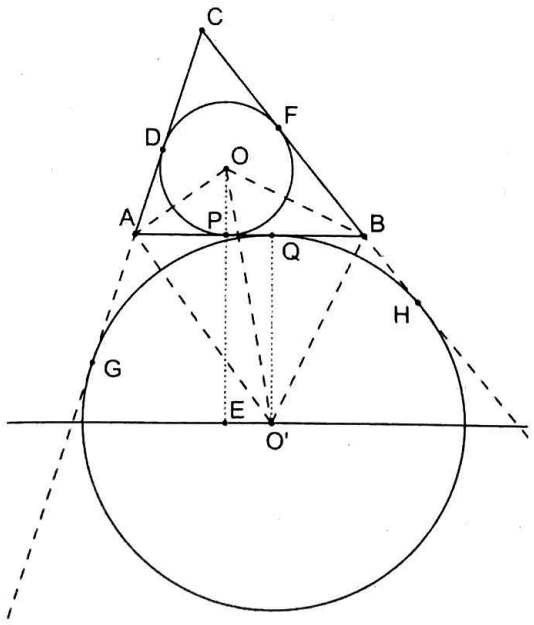
che si dimostra agevolmente essere un'identità. Si è pertanto dimostrato che $GH = HI$; allo stesso modo si può dimostrare che $HI = IG$. In conclusione il triangolo GHI, avendo i lati congruenti, è equilatero. □

Soluzione al Problema 31

a) Si consideri il triangolo OAO', dove si ha $OO' = OE + EO'$; ma $OE = r$ e $EO' = r_a$, quindi $OO' = r + r_a$. L'angolo $\widehat{OAE}$ è la metà dell'angolo $\widehat{DAE}$ (Teorema 3.1); per lo stesso motivo l'angolo $\widehat{EAO'}$ è la metà dell'angolo $\widehat{EAG}$. Ma $\widehat{DAE} + \widehat{EAG} = 180°$, da cui segue che $\widehat{OAE} + \widehat{EAO'} = 90°$. Il triangolo OAO' è dunque rettangolo, e vale in esso il Secondo teorema di Euclide (Teorema 4.9); quindi $OE \cdot EO' = AE^2$, cioè $r \cdot r_a = (\frac{AB}{2})^2$.



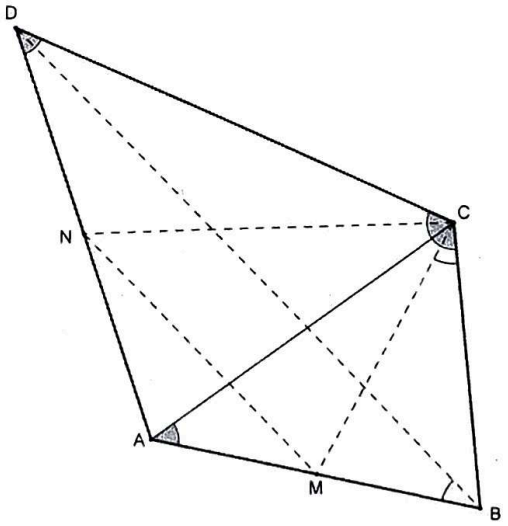
b) Come al punto a), anche nel caso di triangolo qualsiasi l'angolo $\widehat{OAO'}$ è retto; ma per analoga dimostrazione risulta retto anche $\widehat{OBO'}$, pertanto il quadrilatero $AOBO'$ è ciclico (Teorema 19.1). Essendo retti $\widehat{OAO'}$ e $\widehat{OBO'}$, il segmento OO' è inoltre diametro della circonferenza circoscritta ad $AOBO'$ (Lemma 3.9).



I segmenti PO e QO' sono perpendicolari ad AB (Lemma 3.10); se si prolunga PO dalla parte di P per una lunghezza pari a r_a, si viene a formare il quadrilatero $PQO'E$. Esso è evidentemente un rettangolo, perché ha due lati opposti

paralleli e congruenti, e due angoli consecutivi retti (Teorema 8.1). Il triangolo OEO' è dunque rettangolo in $\widehat{OEO'}$; ma si ricordi che OO' è il diametro di una circonferenza: il vertice E dell'angolo retto $\widehat{OEO'}$ quindi deve necessariamente appartenere a tale circonferenza (Lemma 3.9), cioè evidentemente alla circonferenza circoscritta ad $AOBO'$, considerata poc'anzi. In detta circonferenza le corde AB e OE si intersecano in P: applicando il Teorema delle corde (Teorema 10.1) si ottiene $OP : AP = PB : PE$, e cioè $r : AP = PB : r_a$. Ciò è equivalente alla tesi.
c) I segmenti CG e CH sono congruenti in quanto segmenti di tangenza (Teorema 3.1). Ciascuno dei due può essere così scomposto: $CG = CD + DA + AG$ e $CH = CF + FB + BH$. Sempre per il Teorema 3.1: $CD = CF$, $DA = AP$, $AG = AQ$, $FB = BP$, $BH = BQ$. Sostituendo nelle precedenti ed eguagliando si ricava: $CD + AP + AQ = CF + BP + BQ$. Semplificando CD con CF, $AP + AQ = BP + BQ$; ma $AQ = AP + PQ$ e $BP = PQ + BQ$, da cui $AP + AP + PQ = PQ + BQ + BQ$; ne segue immediatamente che $AP = BQ$. Per la seconda parte si calcolino i due lati obliqui di ABC nel seguente modo: $BC = CF+FB$ e $AC = CD+DA$. Si calcoli $BC-AC = CF+FB-CD-DA$: per i motivi visti prima $CF = CD$, quindi $BC-AC = BP-AP$. Ora, $BP = PQ+BQ$; ma avendo appena dimostrato che $AP = BQ$, si conclude che $BC - AC = PQ$, come richiesto. □

Soluzione al Problema 32

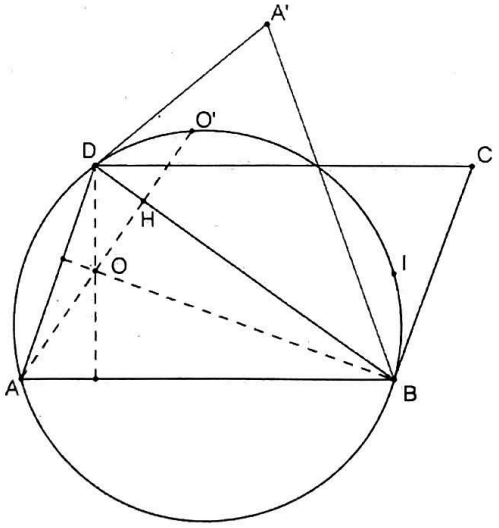


I triangoli ABC e ACD sono simili perché hanno $\widehat{CAB} = \widehat{CDA}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{DCA}$ per ipotesi (Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3). Pertanto vale anche $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$. Si può inoltre istituire la seguente proporzione: $DA : AB = CA : CB$. Sia ora N il punto medio del segmento AD; dalla precedente proporzione, essendo $NA = DA/2$ e $AM = AB/2$, $NA : AM = CA : CB$. Ma poc'anzi si

è dimostrato che $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$, da cui si deduce che anche i triangoli CNA e CMB risultano simili (Secondo criterio di similitudine, Teorema 4.4). Ne segue che $\widehat{BCM} = \widehat{NCA}$. Quindi, $\widehat{NCM} = \widehat{NCA} + \widehat{ACM} = \widehat{BCM} + \widehat{ACM} = \widehat{ACB}$. Si consideri il quadrilatero $AMCN$; la somma dei suoi angoli opposti è la seguente: $\widehat{NAM} + \widehat{MCN} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} + \widehat{ACB} = \widehat{CBA} + \widehat{CAB} + \widehat{ACB}$. Ma l'ultimo termine dell'uguaglianza è pari a 180° in quanto somma degli angoli interni di un triangolo (Teorema 3.2), perciò $\widehat{NAM} + \widehat{MCN} = 180°$ e il quadrilatero $AMCN$ è ciclico (Teorema 9.1). Dalla ciclicità si ricava che $\widehat{NMA} = \widehat{NCA}$ in quanto angoli che insistono sullo stesso arco (Teorema 3.7). Ma essendo M e N punti medi (Teorema 4.6), NM è parallelo a DB; ne segue che $\widehat{DBA} = \widehat{NMA}$ (angoli corrispondenti fra rette parallele, Teorema 3.5). Infine $\widehat{DBA} = \widehat{NMA} = \widehat{NCA} = \widehat{BCM}$, e la tesi è dimostrata. □

Soluzione al Problema 33

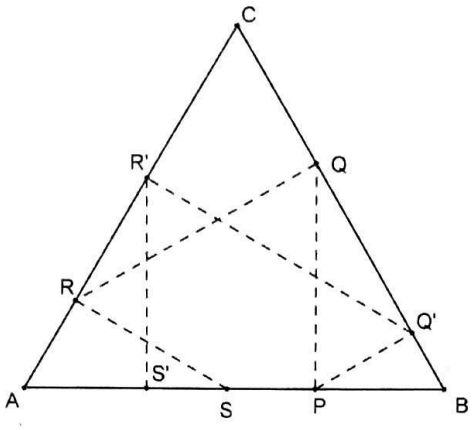
Si consideri la seguente figura:



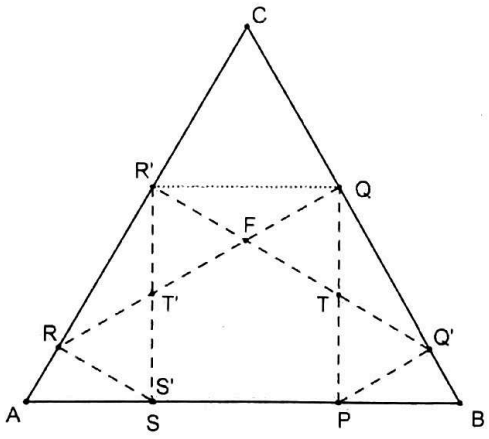
Si è indicato con I l'ortocentro di BCD. Si osservi che, per ovvi motivi, i triangoli ABD e BCD sono congruenti. Si tracci allora l'ortocentro O di ABD; sia O' il suo simmetrico rispetto al piede H dell'altezza AH. Per il Lemma 5.12 esso appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABD. Preso il punto A', simmetrico di A rispetto al segmento BD, O' è l'ortocentro del triangolo $A'DB$ (per motivi di simmetria); come appena dimostrato, esso appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABD. Ma anche i triangoli $A'DB$ e BCD sono simmetrici (rispetto all'asse del segmento BD) e quindi specularmente congruenti; pertanto anche l'ortocentro I di BCD appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABD. La risposta è la *e*. □

Soluzione al Problema 34

Si osservi la seguente figura:



Il punto S coincide con S' se la figura è simmetrica rispetto all'altezza del triangolo uscente da C. In tal caso, $PB = SA$, e quindi $PQ = SR'$.



Sia x il segmento PT. Nel triangolo $PQ'T$ gli angoli $\widehat{TPQ'}$ e $\widehat{PQ'T}$ valgono 60 gradi perché sono formati da segmenti perpendicolari, rispettivamente, a segmenti che formano a loro volta un angolo di 60° (AB e BC nel primo caso, BC e CA nel secondo). Se ne deduce che anche il terzo angolo vale 60° (Teorema 3.2). Il triangolo $PQ'T$ ha tutti gli angoli di 60° e pertanto è equilatero. Allo stesso modo si dimostra che sono equilateri i triangoli TQF, $FR'T'$, $T'RS'$. Il triangolo BPQ ha un angolo retto e un angolo di 60°, perciò è metà di un triangolo equilatero; ne segue che $\widehat{BQP} = 30°$. Ma anche $\widehat{TQ'Q} = 30°$, perché si ottiene da un angolo piatto sottraendogli un angolo retto e un angolo di 60°. Si ricava dunque che il triangolo $TQ'Q$ è isoscele, e che $PQ'T$ e TQF sono, oltre che triangoli equilateri, triangoli congruenti. Allo stesso modo si dimostra che sono isosceli i triangoli $R'FQ$ e $RT'R'$, da cui si deduce che i triangoli equilateri $PQ'T$, TQF, $FR'T'$, $T'RS'$ sono tutti congruenti, e hanno tutti lato x. Ma $SP = R'Q = x\sqrt{3}$ in quanto altezza

di un triangolo equilatero di lato $2x$ (TQR' è metà di tale triangolo equilatero). Sia PB sia AS sono invece lati di un triangolo equilatero di altezza x (PBQ' è metà di tale triangolo equilatero), e valgono quindi $\frac{2\sqrt{3}}{3}x$. In conclusione:

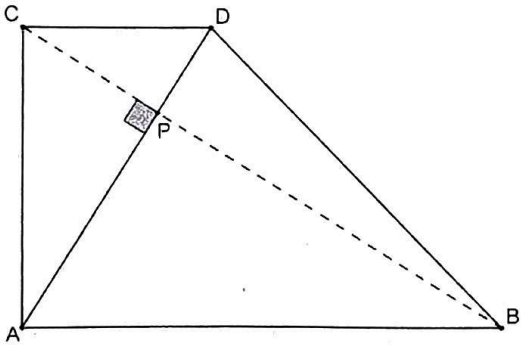
$$AB = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}x + x\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}x\,.$$

Il rapporto PB/AB vale dunque:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}x}{\frac{7\sqrt{3}}{3}x} = \frac{2}{7}\,. \quad \square$$

Soluzione al Problema 35

Si inizi col dimostrare la prima implicazione: supponiamo che le diagonali siano perpendicolari. Nel triangolo PAC, rettangolo in P, risulta che $\widehat{PCA}$ è complementare di $\widehat{CAP}$; nel triangolo CDA, rettangolo in C, $\widehat{ADC}$ è complementare di $\widehat{CAP}$.

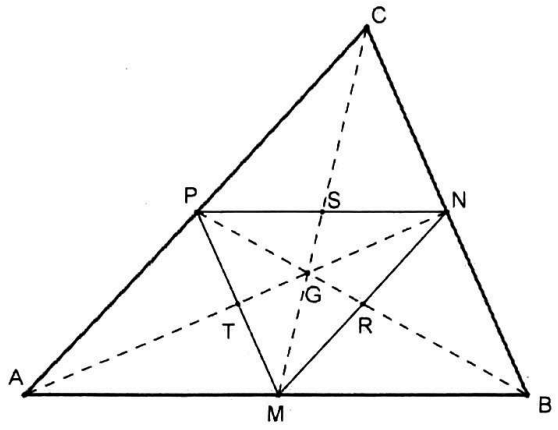


Ne segue che $\widehat{PCA} = \widehat{ADC}$. Quindi i triangoli ABC e ADC sono simili perché ambedue rettangoli, e con un'altra coppia di angoli congruenti (Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3). Vale pertanto la proporzione $AB : AC = AC : CD$, il che è equivalente a dire che la base minore, l'altezza e la base maggiore sono in progressione geometrica.

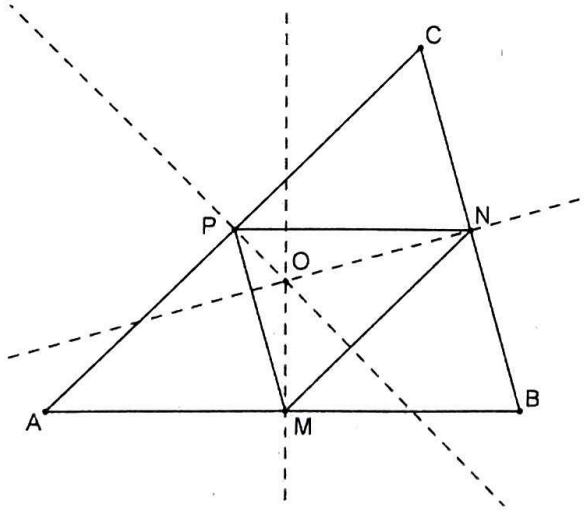
Implicazione inversa: si ponga per ipotesi che $AB/AC = AC/CD = k$, dove k è la ragione della progressione. I triangoli ABC e ADC sono simili perché oltre ad avere due lati in proporzione sono ambedue rettangoli (Secondo criterio di similitudine, Teorema 4.4). Essi hanno pertanto tutti gli angoli congruenti; in particolare, $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$. Allora risulta che i triangoli ABC e APC sono simili per il Primo criterio di similitudine (Teorema 4.3): hanno infatti l'angolo $\widehat{BCA}$ in comune e $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$. Se ne deduce che anche il triangolo APC è rettangolo, e quindi le diagonali del trapezio sono perpendicolari. $\square$

Soluzione al Problema 36

La prima parte è un'ovvia conseguenza del Teorema di Talete (Teorema 4.7): infatti il punto S, intersezione fra CM e PN, è punto medio di PN per il suddetto teorema; allo stesso modo R e T sono punti medi di PM e MN. Pertanto i segmenti MS, NT, PR, sono mediane nel triangolo MNP, e il loro punto di intersezione, G, è il baricentro (Teorema 5.2).

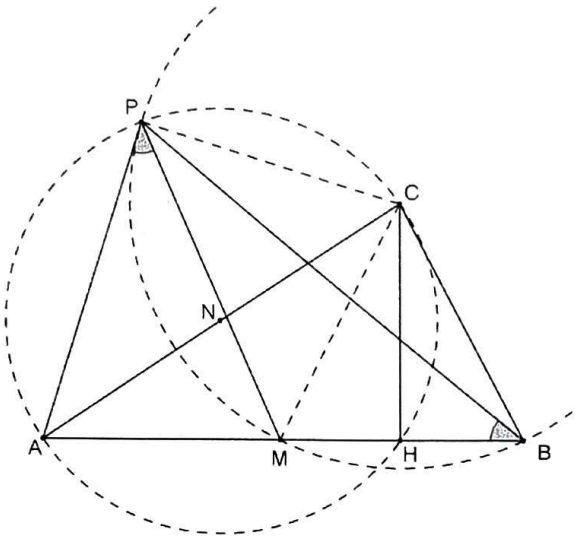


Per la seconda parte, sia O il circocentro di ABC. Per il Teorema 4.6 MN è parallelo ad AC, NP è parallelo ad AB e PM a BC. Gli assi del triangolo ABC sono pertanto perpendicolari ai lati di MNP, ed passano per i suoi vertici.



Essi sono dunque altezze di MNP, e il loro punto di incontro è l'ortocentro di tale triangolo (Teorema 5.1). Si osservi che il risultato vale anche se il triangolo è ottusangolo, cioè se il punto O è esterno sia ad ABC sia a MNP (si veda il Lemma 5.8). □

Soluzione al Problema 37

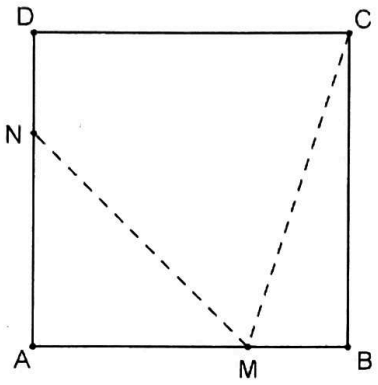


Si inizi osservando che $HB = AB/4$ per ipotesi, e quindi che H è il punto medio di MB. Nel triangolo MBC il segmento CH è contemporaneamente altezza e mediana, da cui si deduce che il triangolo è isoscele (Teorema 5.9). Pertanto $CM = CB$; se si traccia la circonferenza $\mathcal{C}_1$ avente centro in C e passante per P e B, essa passa anche per M. Il segmento PM è una corda di $\mathcal{C}_1$. Si tracci ora la circonferenza $\mathcal{C}_2$ avente centro N passante per C e per P. $\mathcal{C}_2$ passa necessariamente anche per A, in quanto N è punto medio di AC, quindi $AN = NC$. Pertanto il segmento AC è un diametro. Il triangolo ACP è dunque rettangolo, perché inscritto in una semicirconferenza (Lemma 3.9). Ne consegue che il segmento PA appartiene alla retta tangente alla circonferenza $\mathcal{C}_1$ (Lemma 3.10)[12]. Ma allora l'angolo $\widehat{APM}$ è un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda PM (Teorema 3.7). L'angolo $\widehat{PBA}$, nella medesima circonferenza, è angolo alla circonferenza che sottende la stessa corda PM. Si conclude che i due angoli sono congruenti, come si voleva dimostrare. □

Soluzione al Problema 38

Sia $x = AM = AN$; l'area del triangolo AMN vale $x^2/2$, mentre l'area del triangolo MBC è $MB \cdot BC/2 = (1 - x) \cdot 1/2 = (1 - x)/2$.

[12]Si osservi, incidentalmente, che il quadrilatero $APCH$ è ciclico avendo due angoli opposti supplementari ($\widehat{CPA} = \widehat{AHC} = 90°$), da cui si ottiene che anche il punto H appartiene a $\mathcal{C}_2$ (Teorema 9.1).



Per massimizzare l'area del quadrilatero $CDNM$ sarà sufficiente minimizzare la somma dei triangoli AMN e MBC, cioè calcolare il valore minimo della somma

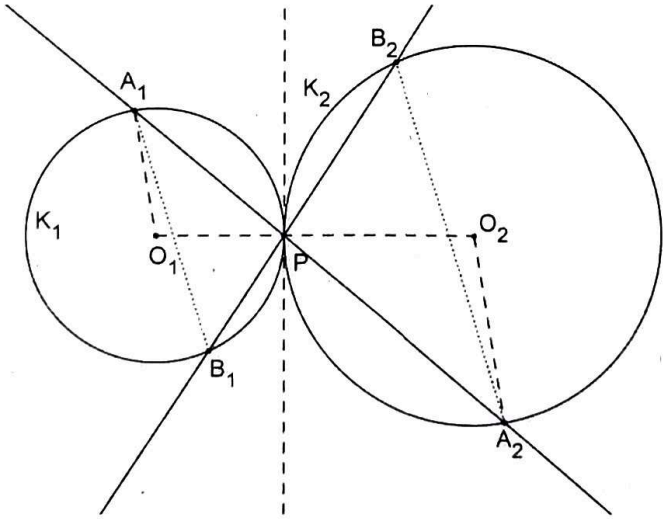
$$x^2/2 + (1-x)/2\,.$$

L'espressione trovata rappresenta ovviamente una parabola (avente concavità rivolta verso l'alto) e il suo valore minimo si avrà nell'ascissa del vertice, $\frac{-b}{2a}$ (Lemma 13.2). Si ottiene agevolmente che $x = 1/2$; l'area del quadrilatero $CDNM$ varrà allora:

$$1 - (1/2)^2/2 - (1-1/2)/2 = 1 - 3/8 = 5/8\,.$$

La risposta è pertanto la *d.* □

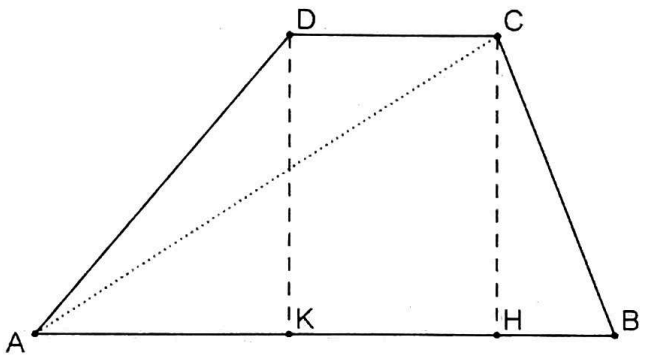
Soluzione al Problema 39



Si considerino i triangoli O_1PA_1 e O_2PA_2: essi sono ambedue isosceli perché $O_1P = O_1A_1$ in quanto raggi di K_1, e $O_2P = O_2A_2$ in quanto raggi di K_2. Ma $\widehat{O_1PA_1} = \widehat{O_2PA_2}$ perché opposti al vertice; quindi anche $\widehat{PA_1O_1} = \widehat{PA_2O_2}$. Ne segue che i triangoli O_1PA_1 e O_2PA_2 sono simili per il Primo criterio di similitudine

(Teorema 4.3), e il loro rapporto di similitudine è pari al rapporto R_1/R_2 fra i raggi di K_1 e K_2 (Teorema 4.1); pertanto vale lo stesso rapporto anche fra i lati: $PA_1 : PA_2 = R_1 : R_2$. Ma allo stesso modo è possibile dimostrare che sono simili i triangoli O_1B_1P e O_2B_2P, con il medesimo rapporto di similitudine. Quindi vale anche la proporzione $PB_1 : PB_2 = R_1 : R_2$, da cui $PA_1 : PA_2 = PB_1 : PB_2$. Gli angoli $\widehat{B_1PA_1}$ e $\widehat{B_2PA_2}$ sono congruenti perché opposti al vertice; in conclusione, i triangoli PA_1B_1 e PA_2B_2 sono simili per il Secondo criterio di similitudine (Teorema 4.4). □

Soluzione[13] al Problema 40



Sia $ABCD$ un trapezio di area 1, base maggiore AB, base minore CD e altezza h. Siano H e K le proiezioni di C e D, rispettivamente, sulla base AB. Si supponga, senza perdita di generalità, che sia $AK \geq HB$, cioè che sia $DA \geq BC$. Essendo $KH = CD$, risulta anche $AH \geq KB$, da cui segue che AC è la diagonale maggiore[14]. Si calcoli la seguente somma: $AH + KB = AK + KH + KH + HB = AK + KH + HB + CD = AB + CD$. Dal momento che $AH \geq KB$, $2AH \geq AH + KB = AB + CD$; si riscriva quest'ultima disuguaglianza come $AH \geq \frac{AB+CD}{2}$. L'area del trapezio (che nel presente caso è 1 per ipotesi), vale $\mathcal{A} = 1 = \frac{(AB+CD)h}{2}$; quindi $AH \geq 1/h$. Si calcoli ora, tramite il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1), la lunghezza della diagonale maggiore AC: $AC^2 = AH^2 + h^2 \geq 1/h^2 + h^2$. Si applichi allora la Disuguaglianza AM-GM (Teorema 13.4) a h^2 e $1/h^2$:

$$\frac{h^2 + 1/h^2}{2} \geq \sqrt{h^2 \cdot 1/h^2} = 1\,,$$

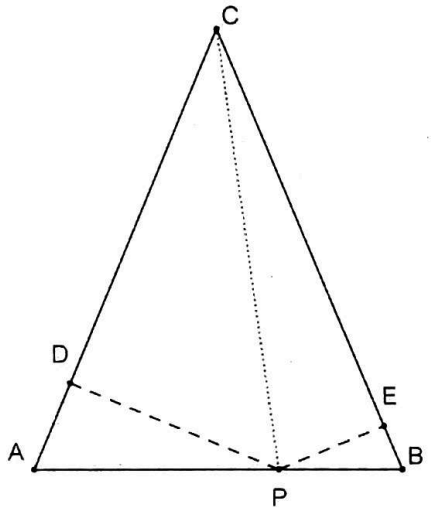
da cui $h^2 + 1/h^2 \geq 2$; quindi $AC^2 \geq 2$ e pertanto il minore valore possibile per la diagonale maggiore è $\sqrt{2}$. Si osservi che un trapezio che realizza la condizione

[13] Liu 2001, da cui ho tratto il problema, riporta sei soluzioni a partire da pagina 120.

[14] Perché $AC^2 = AH^2 + h^2$ mentre $BD^2 = BK^2 + h^2$. Nell'ipotesi in cui sia $HB \geq AK$ sarà sufficiente prendere BD come diagonale maggiore.

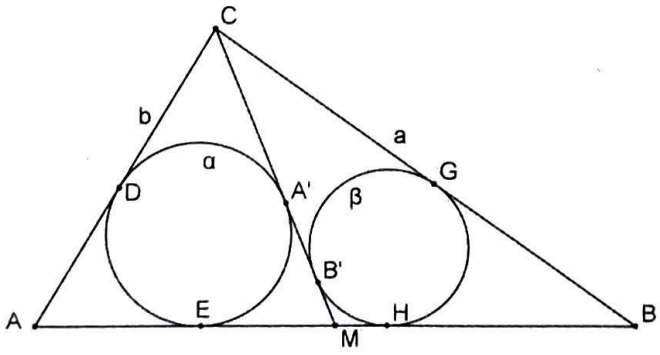
richiesta deve essere il più "compatto" possibile, cioè avere basi e altezza di dimensioni minime possibile, e uguali fra loro. Tale figura è un quadrato di lato 1 (e area 1), che ha appunto diagonale pari a $\sqrt{2}$. □

Soluzione al Problema 41



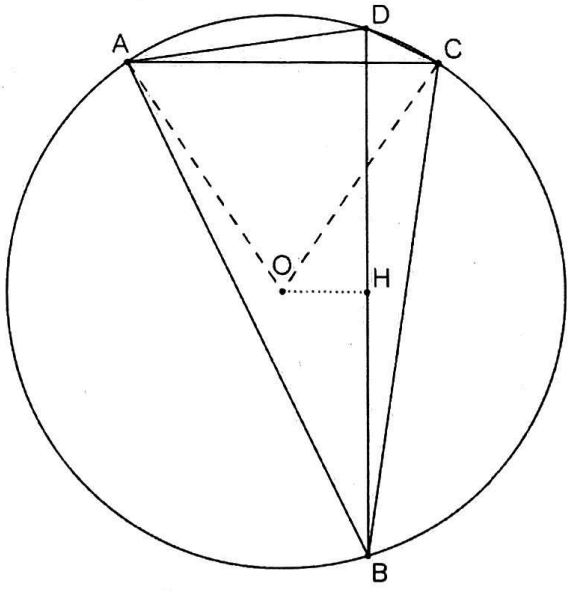
Sia $l = BC = CA$ il lato del triangolo isoscele e $\mathcal{A}$ la sua area. Si scelga un punto qualsiasi P sulla base AB; si osservi che $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{APC} + \mathcal{A}_{CPB}$. Quindi l'area totale si può calcolare come $\mathcal{A} = \frac{1}{2}l \cdot DP + \frac{1}{2}l \cdot EP$. Ne segue, con facile calcolo, che la somma $DP + EP$ è costante, e vale $2\mathcal{A}/l$ indipendentemente dalla posizione scelta per P. Sia ora h l'altezza del triangolo misurata rispetto a uno dei due lati obliqui: calcolando $\mathcal{A}$ relativamente a uno di tali lati, si ha immediatamente che $DP + EP = h$. Pertanto non sólo si è dimostrato che la somma richiesta è costante, ma si è anche calcolato il suo valore. Questo risultato è evidentemente un sottocaso del Teorema di Viviani, già esaminato al capitolo 1 (si vedano l'Esempio 1.3 e il Problema 3). □

Soluzione al Problema 42



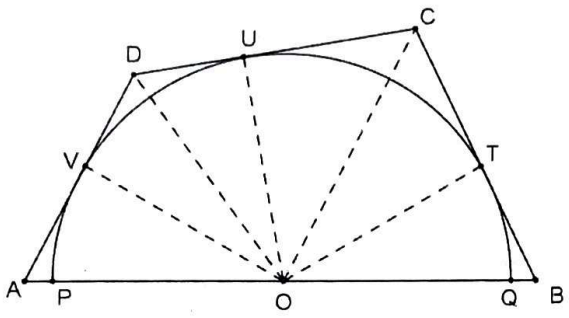
Si applicherà ripetutamente la proprietà relativa all'uguaglianza dei segmenti di tangenza (Teorema 3.1). Valgono infatti le seguenti: $AE = AD$, $ME = MA'$, $MB' = MH$, $BH = BG$, $CA' = CD$, $CB' = CG$. Il segmento che si deve calcolare è $A'B'$: ma $A'B' = CB' - CA' = MA' - MB'$ (1). Iniziamo dalla prima di tali uguaglianze: $A'B' = CB' - CA' = CG - CD = (a - BG) - (b - DA) = a - BH - b + AE = a - b + AE - BH$ (2), dove si sono calcolati CG e CD come differenze di segmenti. Si calcolino AE e BH, sempre come differenza di segmenti: $AE = AM - ME = AM - MA'$; $BH = BM - MH = BM - MB'$. La differenza fra i due sarà: $AE - BH = AM - MA' - (BM - MB') = AM - BM + MB' - MA' = MB' - MA'$ (3), dove si è posto $AM - BM = 0$ in quanto M punto medio di AB. Ma, come detto prima in (1), $A'B' = MA' - MB'$, da cui all'opposto $MB' - MA' = -A'B'$; si inserisca quest'ultima nella (3): $AE - BH = -A'B'$. Quest'ultima relazione va invece nella (2): $A'B' = a - b + AE - BH = a - b - A'B'$, da cui segue immediatamente la tesi. □

Soluzione al Problema 43



Si consideri la proiezione H del centro O sulla diagonale BD. Il segmento DH, essendo perpendicolare ad AC per ipotesi, è la somma delle altezze dei triangoli ACD e AOC. Tali triangoli costituiscono il quadrilatero $AOCD$, una delle due parti in cui la spezzata AOC divide il quadrilatero di partenza. Pertanto $\mathcal{A}_{AOCD} = \frac{1}{2} AC \cdot DH$. L'area totale del quadrilatero $ABCD$ è invece: $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (Teorema 12.2). Ma essendo il segmento OH, uscente dal centro, perpendicolare a BD, H è il punto medio di BD (Lemma 3.10) e $DH = BD/2$. Con ciò la tesi è dimostrata. □

Soluzione[15] al Problema 44



Si noti che, essendo $ABCD$ ciclico, i suoi angoli opposti sono supplementari (Teorema 9.1). Pertanto $\widehat{BCD} = 180° - \widehat{DAO}$, e quindi, noto che $\widehat{BCO} = \widehat{BCD}/2$ (Teorema 3.1), $\widehat{BCO} = 90° - \widehat{DAO}/2$. In virtù di elementari proprietà trigonometriche, nei triangoli rettangoli UOC e COT si ha $CT = r \cdot \cot(90° - \widehat{DAO}/2)$; nel triangolo rettangolo AOV, $AO = \dfrac{r}{\sin \widehat{DAO}}$ e $AV = r \cdot \cot \widehat{DAO}$. Ne segue che:

$$CT + AV = r \cot(90° - \widehat{DAO}/2) + r \cot \widehat{DAO} =$$

$$= r \tan(\widehat{DAO}/2) + r \cot \widehat{DAO} = r \left[\tan(\widehat{DAO}/2) + \cot \widehat{DAO}\right] .$$

Ora, dimostriamo che $\tan(\widehat{DAO}/2) + \cot \widehat{DAO} = \dfrac{1}{\sin \widehat{DAO}}$:

$$\tan(\widehat{DAO}/2) + \cot \widehat{DAO} = \frac{\sin(\widehat{DAO}/2)}{\cos(\widehat{DAO}/2)} + \frac{\cos \widehat{DAO}}{\sin \widehat{DAO}} ;$$

utilizzando le formule di duplicazione per esprimere $\cos \widehat{DAO}$ e $\sin \widehat{DAO}$:

$$\tan(\widehat{DAO}/2) + \cot \widehat{DAO} =$$

$$= \frac{\sin(\widehat{DAO}/2)}{\cos(\widehat{DAO}/2)} + \frac{1 - 2\sin^2(\widehat{DAO}/2)}{2\sin(\widehat{DAO}/2)\cos(\widehat{DAO}/2)} .$$

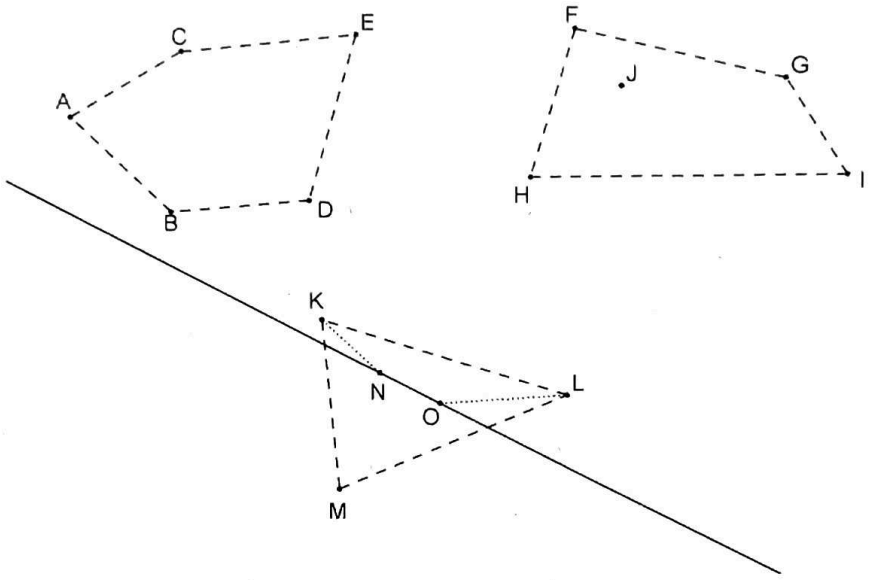
Con facili passaggi algebrici si ricava

$$\tan(\widehat{DAO}/2) + \cot \widehat{DAO} = \frac{1}{\sin \widehat{DAO}} ,$$

da cui $UC + AV = AO$. Simmetricamente, con analogo svolgimento, si dimostra che $TB + DV = OB$. Sommando a due a due le ultime relazioni trovate, si ha che $AD + BC = AB$, che è quanto si doveva dimostrare. □

[15] Reiman 2001 riporta tre soluzioni dell'esercizio a partire da pagina 305.

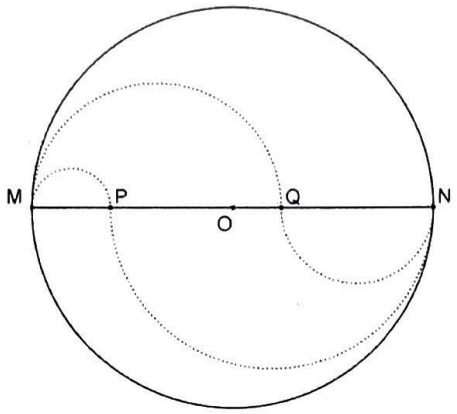
Soluzione al Problema 45



Si congiungano a due a due i punti con un segmento, ma solamente quando si ha una coppia di punti tale che la retta passante per essi lascia tutti gli altri punti nello stesso semipiano: in questo modo si verrà a tracciare un contorno esterno, che passerà per alcuni punti e conterrà gli altri (se ve ne sono). I casi da esaminare sono tre: a) se il contorno tocca tutti e 5 i punti (e quindi è un pentagono convesso), sarà sufficiente lasciare fuori un punto qualsiasi e congiungere gli altri quattro per ottenere il quadrilatero richiesto; b) se il contorno più esterno è un un quadrilatero convesso che contiene il quinto punto, la proprietà è banalmente rispettata; c) se congiungendo i punti più esterni si forma un triangolo che contiene gli altri due punti, si procederà in questo modo: si tracci la retta che passa per i due punti interni. Essa incontrerà due dei lati del triangolo (non può passare per nessuno dei vertici, perché in tal caso tre punti sarebbero allineati): il quadrilatero formato dai due punti interni ($KNOL$ in figura) e dai vertici del lato del triangolo non intersecato dalla retta è un quadrilatero convesso. Non essendo possibili ulteriori configurazioni, la proprietà è dimostrata. □

Soluzione al Problema 46

Sia $2x = MP$, $2r-2x = PN$, $2y = MQ$, $2r-2y = QN$; il perimetro della pelecoide vale: $\pi x + \pi(r-x) + \pi y + \pi(r-y) = 2\pi r$. Il suo valore pertanto è indipendente dalla posizione dei punti P e Q ed è uguale alla lunghezza della circonferenza.



Si calcoli ora l'area della pelecoide:

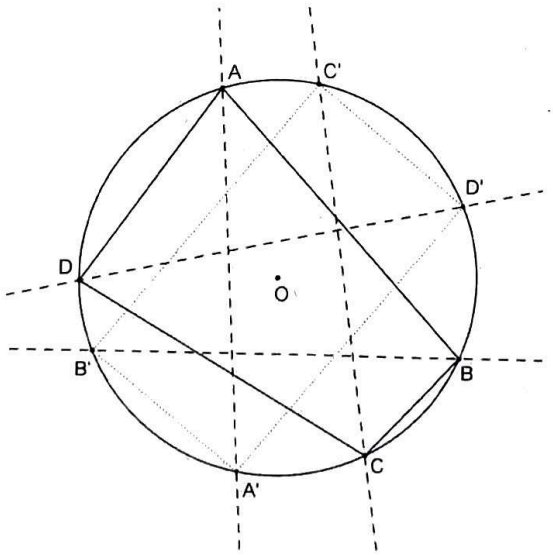
$$\frac{1}{2}\pi[y^2 - x^2 + (r-x)^2 - (r-y)^2]\,.$$

Dopo alcuni facili passaggi si ricava che tale area è pari a $\pi r(y-x)$; ma $PQ = 2y-2x$, perciò l'area si può anche scrivere $\pi r(PQ/2)$. Si calcoli il rapporto fra l'area della pelecoide e quella del cerchio:

$$\frac{\pi r(PQ/2)}{\pi r^2} = \frac{(PQ/2)}{r} = \frac{PQ}{2r} = \frac{PQ}{MN}\,,$$

come era richiesto. □

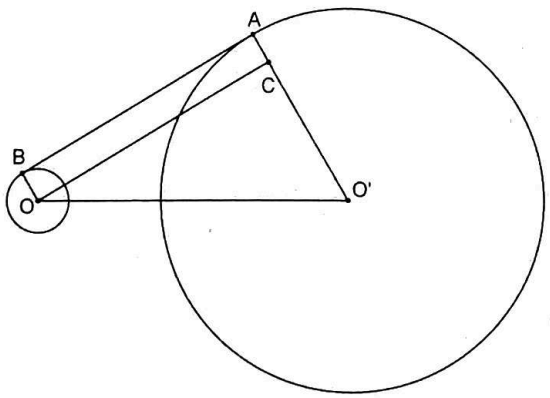
Soluzione al Problema 47



Si osservi che, essendo AA' bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$, A' è il punto medio dell'arco $DA'B$ (Teorema 3.7); allo stesso modo C' è il punto medio dell'arco $BC'D$; ne consegue che A' e C' sono diametralmente opposti. Ugualmente si dimostra che anche B' e D' sono estremi di un diametro. Pertanto le diagonali $A'C'$ e $B'D'$ del

quadrilatero $A'B'C'D'$, essendo due diametri, si bisecano nel centro della circonferenza: dunque $A'B'C'D'$ è un parallelogramma (Teorema 8.1). Ma le diagonali $A'C'$ e $B'D'$ sono anche fra loro congruenti, quindi $A'B'C'D'$ è un rettangolo (Teorema 8.1). Allo stesso modo: essendo A' il punto medio dell'arco $DA'B$ e C' punto medio dell'arco $BC'D$, la diagonale $A'C'$ del rettangolo è perpendicolare alla diagonale BD del quadrilatero di partenza; ciò accade, ovviamente, anche per $B'D'$ e AC. Ma $A'B'C'D'$ sarà un quadrato se le sue diagonali sono perpendicolari (Teorema 8.1): pertanto la condizione che garantisce che $A'B'C'D'$ sia un quadrato sarà la perpendicolarità di BD e AC. Infine, se $ABCD$ è un rettangolo, le sue diagonali sono congruenti e sono diametri; la costruzione fornirà un quadrilatero $A'B'C'D'$ avente ancora le medesime diagonali, ma perpendicolari a quelle di $ABCD$: in conclusione, a ogni passaggio si ottiene un rettangolo congruente a quello di partenza ma ruotato di 90 gradi; dopo due passaggi si tornerà al rettangolo iniziale. □

Soluzione al Problema 48

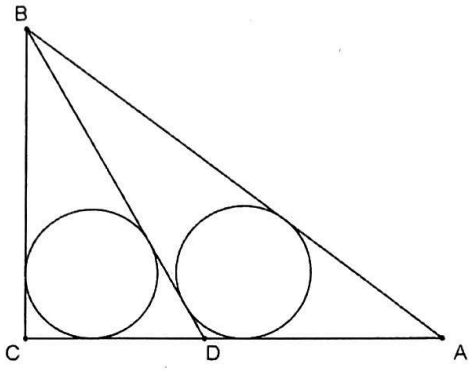


Si tracci il segmento AB tangente ad ambedue le circonferenze e si conduca dal centro O della circonferenza più piccola la parallela ad AB, che interseca il raggio AO' in C. $OO' = 100$ e $AC = 10$, pertanto $CO' = 50$, e il triangolo $OO'C$ è metà di un triangolo equilatero. Il segmento OC è l'altezza del triangolo e vale $50\sqrt{3}$ mm. L'angolo $AO'O = 60°$, quindi la cinghietta percorre sulla circonferenza più grande un tratto corrispondente a 240°, pari a due terzi di tale circonferenza; la cinghietta aderisce invece alla circonferenza piccola per un tratto corrispondente a un terzo della sua lunghezza (angolo di 120 gradi). In conclusione, la lunghezza totale è:

$$50\sqrt{3} + 50\sqrt{3} + \frac{2}{3}(2\pi \cdot 60) + \frac{1}{3}(2\pi \cdot 10) = 100\sqrt{3} + 80\pi + \frac{20}{3}\pi \simeq 445\,;$$

la soluzione è dunque 445. □

Soluzione al Problema 49



Sia x la lunghezza del segmento CD; evidentemente $DA = 4 - x$. Il valore di x deve essere compreso fra 0 e 4. Il segmento BD, in base al Teorema di Pitagora (Teorema 2.1), vale $\sqrt{x^2+9}$. Allora, secondo il Lemma 5.10, è possibile calcolare il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo BCD:

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{3+x+\sqrt{x^2+9}}{2}}.$$

Allo stesso modo, il raggio della circonferenza inscritta in DAB sarà:

$$r = \frac{\frac{3(4-x)}{2}}{\frac{5+(4-x)+\sqrt{x^2+9}}{2}}.$$

Dal momento che i due raggi sono uguali, si giunge all'uguaglianza seguente:

$$\frac{\frac{3x}{2}}{\frac{3+x+\sqrt{x^2+9}}{2}} = \frac{\frac{3(4-x)}{2}}{\frac{5+(4-x)+\sqrt{x^2+9}}{2}},$$

$$\frac{x}{3+x+\sqrt{x^2+9}} = \frac{4-x}{9-x+\sqrt{x^2+9}}.$$

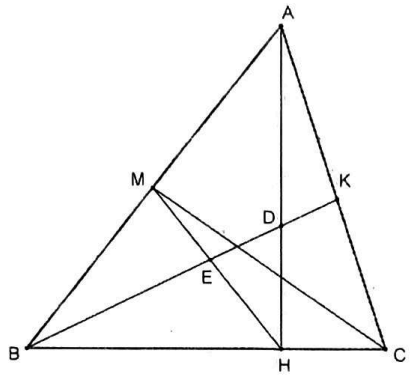
Con pochi, facili passaggi, si ottiene che x deve soddisfare l'equazione $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 12x = 0$; dopo avere escluso la radice $x = 0$ si osserva che l'equazione ammette la soluzione $x = 4$, essa pure non accettabile. Le ulteriori soluzioni sono $x = \pm\sqrt{3}$, tra le quali si prenderà solo quella positiva. Pertanto $x = \sqrt{3}$ da cui si ricava che

$$r = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{3+x+\sqrt{x^2+9}}{2}} = \frac{3x}{3+x+\sqrt{x^2+9}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

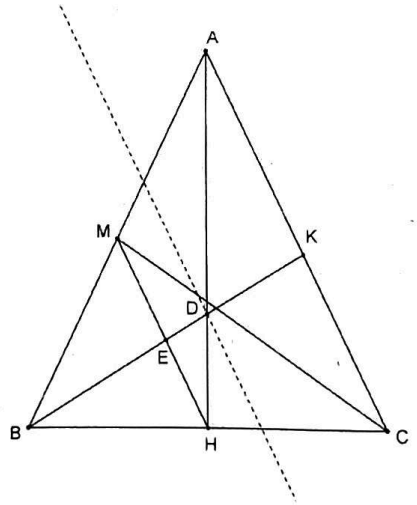
che è il valore cercato. □

Soluzione al Problema 50

La prima figura è disegnata rozzamente, per fare delle ipotesi preliminari.

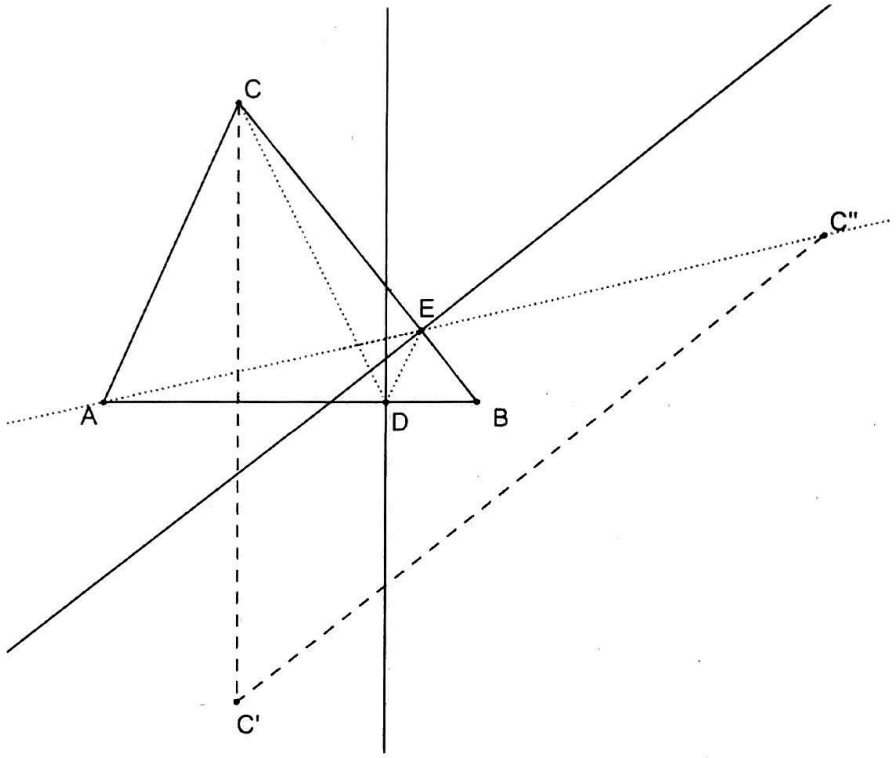


(1) Si inizi osservando che M è punto medio di AB ed E punto medio di BK ($BE = 3$, $EK = ED + DK = 3$). Quindi per il Teorema 4.6 risulta che ME, e quindi HM, come richiesto, è parallelo ad AC.
A questo punto è possibile tracciare una figura più precisa:



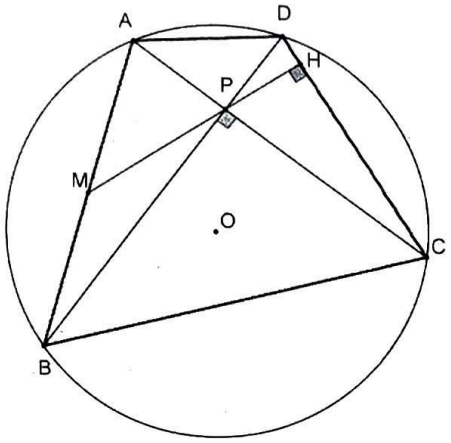
(2) Noto che $AC \parallel HM$, per il Teorema di Talete (Teorema 4.7) H deve essere il punto medio di BC, e pertanto AH è contemporaneamente altezza e mediana: il triangolo ABC è dunque isoscele sulla base BC e perciò $AB = AC$ (Teorema 5.9).
(3) Il punto di incontro fra le mediane AH e CM è il baricentro (Teorema 5.2). Ma si noti che il punto D per ipotesi divide la bisettrice BK in due parti, delle quali BD è doppia di DK. Questa è una proprietà tipica del baricentro (Teorema 5.3), quindi il baricentro deve trovarsi, per il Teorema di Talete (Teorema 4.7), sulla retta r parallela ad AC e passante per D; il baricentro d'altra parte appartiene alla mediana AK, che incontra r esattamente in D. Pertanto D deve essere il baricentro e anche BK è mediana, oltre che bisettrice. Perciò ABC è isoscele anche sulla base AC (Teorema 5.9), quindi $AB = BC$, e il triangolo è equilatero. □

Soluzione al Problema 51



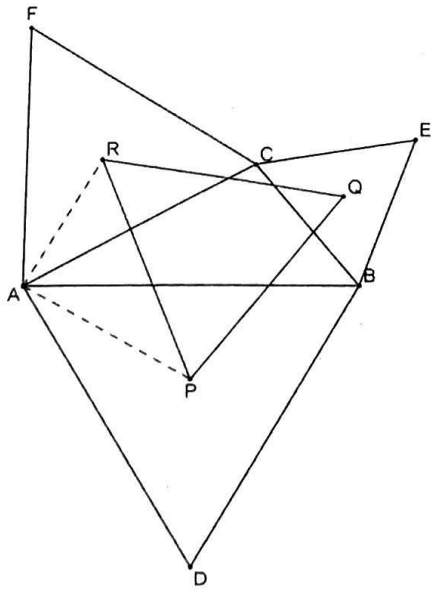
Il raggio uscente da C sia riflesso nel punto D del segmento AB, quindi nel punto E del segmento BC, e infine vada a incidere in A. Sia inoltre C' il simmetrico di C rispetto ad AB (e quindi $CC'D$ è isoscele), e $C"$ il simmetrico di C' rispetto alla retta BC ($C'BC"$ è isoscele). La condizione indicata nel testo del problema equivale alla richiesta che il punto E appartenga al segmento BC, il che accade se $\widehat{ABC"} \leq 180°$ e $\widehat{C"CA} \leq 180°$. Ora, essendo C' il simmetrico di C rispetto ad AB, AB è asse del segmento CC', e dunque anche $CC'B$ è isoscele: pertanto $\widehat{CBC'} = 2\beta$. Ma la retta CB è l'asse del segmento $C'C"$, quindi per simmetria $\widehat{CBC"} = \widehat{CBC'} = 2\beta$. Allora $\widehat{ABC"} = \beta + 2\beta = 3\beta$. La condizione poc'anzi indicata ($\widehat{ABC"} < 180°$) sarà $3\beta < 180°$ e cioè $\beta < 60°$. Si noti ora che $CB = BC'$ perché $CC'B$ è isoscele; ma $BC' = BC"$ perché $C'BC"$ è isoscele; di conseguenza $CB = BC"$, e anche $CBC"$ risulta isoscele. In quest'ultimo triangolo, allora, $\widehat{C"CB} = (180° - \widehat{CBC"})/2 = (180° - 2\beta)/2 = 90° - \beta$. Quindi $\widehat{C"CA} = \widehat{BCA} + \widehat{C"CB} = \gamma + 90° - \beta$. Dal Teorema 3.2, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, dunque $\alpha + \beta + \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; sostituendo nella relazione precedente, $\widehat{C"CA} = \gamma + 90° - \beta = 270° - \alpha - 2\beta$. La condizione richiesta era $\widehat{C"CA} < 180°$, cioè $270° - \alpha - 2\beta < 180°$, equivalente a $\beta > 45° - \alpha/2$. In conclusione, è necessario che valga $45° - \alpha/2 < \beta < 60°$. □

Soluzione al Problema 52



Si inizi col dimostrare che il triangolo BPM è isoscele: si ha che gli angoli $\widehat{BPM}$ e $\widehat{DPH}$ sono congruenti in quanto opposti al vertice. Ma $\widehat{DPH} = \widehat{PCH}$ perché essi sono complementari dello stesso angolo ($\widehat{HDP}$; rispettivamente nei triangoli rettangoli HPD e DPC). Ora, $\widehat{PCH} = \widehat{ABD}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sulla medesima corda AD (Teorema 3.7). Quindi il triangolo BPM è isoscele sulla base BP, e in particolare $BM = MP$. Allo stesso modo si dimostra che AMP è isoscele sulla base PA, e pertanto che $AM = MP$. Ne segue che $BM = AM$ e quindi che M è il punto medio di AB, come si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 53



Fra le possibili dimostrazioni del Teorema di Napoleone, proponiamo quella trigonometrica che è particolarmente semplice. Si indichino con a, b e c le misure dei lati BC, AC e AB rispettivamente; sia inoltre α l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CAB}$. Si osservi ora che, essendo P e R i centri dei triangoli ABD e CAF, gli angoli $\widehat{BAP}$ e $\widehat{RAC}$ valgono 30 gradi; inoltre AP è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo equilatero ABD, e pertanto equivale al suo lato (c) moltiplicato per $\sqrt{3}/3$. Identico ragionamento per il segmento AR nel triangolo ACF. Dunque, tenendo conto che l'angolo $\widehat{RAP}$ vale $\alpha + 30° + 30°$, e applicando il Teorema del coseno (Teorema 12.5) al triangolo APR, si ottiene:

$$PR^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}b\frac{\sqrt{3}}{3}c \cdot \cos(\alpha + 60°)\,;$$

svolgendo i calcoli e applicando la formula di somma del coseno:

$$PR^2 = \frac{1}{3}[b^2 + c^2 - 2bc(\cos 60° \cos\alpha - \sin 60° \sin\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha)\,. \qquad (1)$$

Si applichi il Teorema del coseno (Teorema 12.5) al triangolo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,,$$

da cui

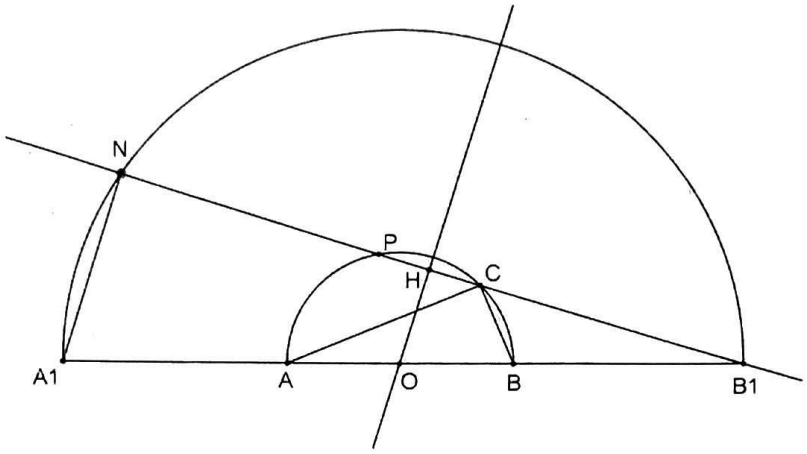
$$bc\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\,;$$

per concludere, si inserisca quest'ultima espressione nella (1), tenendo presente che $bc\sin\alpha$ è pari al doppio dell'area $\mathcal{A}$ del triangolo ABC (Teorema 12.1):

$$PR^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\mathcal{A}\right)\,.$$

Come si può notare, questa espressione è indipendente dal particolare lato scelto; se si ripetono infatti calcoli analoghi per ricavare RQ e QP, si ottiene la medesima espressione, il che dimostra che il triangolo PQR è equilatero. Nel caso in cui i triangoli siano costruiti internamente la dimostrazione segue il medesimo procedimento. □

Soluzione al Problema 54



Sia O il punto medio di AB: il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O (Lemma 3.9); allo stesso modo anche il triangolo A_1B_1N, essendo rettangolo in N per costruzione, è inscritto in una circonferenza di centro O (Lemma 3.9). La retta B_1N interseca la circonferenza di diametro AB in due punti distinti, che eventualmente potrebbero coincidere se B_1N fosse tangente a tale circonferenza. Nella figura il punto C è più vicino a B_1 mentre P è più vicino a N, ma potrebbe anche accadere il contrario. Sia ora H la proiezione di O su B_1N: OH è perpendicolare alla corda PC nella circonferenza di diametro AB, pertanto H è il punto medio di PC (Lemma 3.10); con il medesimo ragionamento, H è il punto medio della corda B_1N nella circonferenza di diametro A_1B_1 (si osservi che, nel caso limite in cui B_1N è tangente alla circonferenza più piccola, i tre punti P, H e C coincidono). Ne segue che $B_1C = NP$ e che $B_1P = CN$. Il testo del problema chiede di considerare l'area del rettangolo di lati B_1C e CN, e cioè $B_1C \cdot CN$; ma per le uguaglianze appena dimostrate $B_1C \cdot CN = B_1C \cdot B_1P$. Per il Teorema delle secanti (Teorema 10.2) risulta che $B_1C \cdot B_1P = B_1B \cdot B_1A$. Ma $B_1B = AB$ e $B_1A = 2AB$, pertanto $B_1C \cdot CN = 2AB^2$, che è quanto si voleva dimostrare. Il caso in cui il punto C sia più vicino a N si risolve in modo analogo. □

Soluzione[16] al Problema 55

Si prenda per assurdo $a^2 + b^2 + c^2 < 4\sqrt{3}\mathcal{A}$. Grazie al Teorema 12.1 l'area del triangolo può essere così espressa: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, dove α è l'angolo compreso fra i lati b e c. Quindi la precedente diseguaglianza diventa:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{3}} < 2bc\sin\alpha\,.$$

[16]Su Engel 1998 a partire da pag. 300 si possono trovare ben 11 dimostrazioni del presente esercizio. Quella qui proposta ricalca la dimostrazione numero 3.

Si applichi ora il Teorema del coseno (Teorema 12.5): $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Pertanto, innalzando al quadrato ambedue le relazioni trovate,

$$4b^2c^2\sin^2\alpha > \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3},$$

e

$$4b^2c^2\cos^2\alpha = (b^2+c^2-a^2)^2.$$

Si sommi termine a termine:

$$4b^2c^2\sin^2\alpha + 4b^2c^2\cos^2\alpha = 4b^2c^2 > \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3} + (b^2+c^2-a^2)^2,$$

cioè

$$12b^2c^2 > (a^2+b^2+c^2)^2 + 3(b^2+c^2-a^2)^2.$$

Sviluppando i quadrati e semplificando si giunge a

$$a^4+b^4+c^4 < a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2;$$

quest'ultima espressione è equivalente a

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 < 0.$$

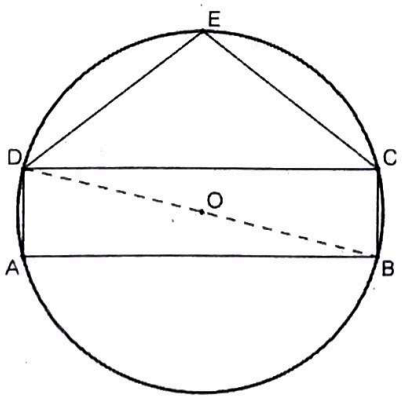
La somma di tre quadrati dovrebbe quindi essere negativa: ciò è palesemente assurdo, perciò dev'essere necessariamente

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\mathcal{A},$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 56

L'area del rettangolo è $b\cdot h$, quella del triangolo è $(1/2)b\cdot(r-h/2)$, dal momento che l'altezza del triangolo è pari al raggio diminuito di metà dell'altezza del rettangolo.

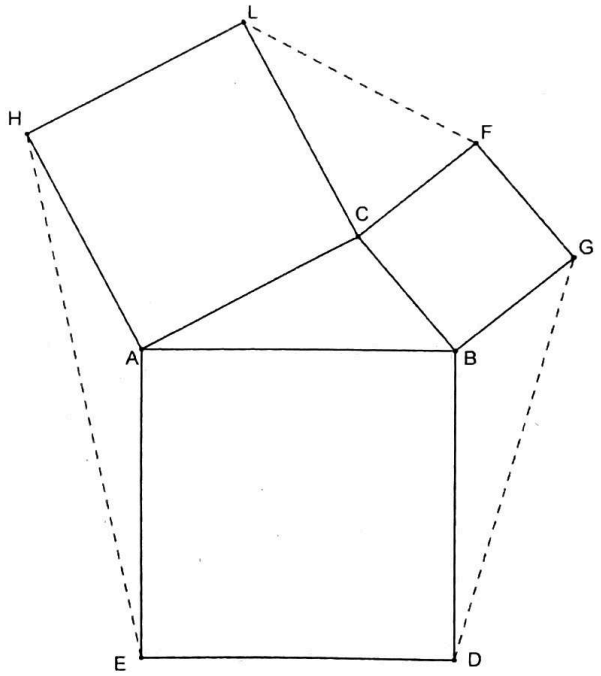


Pertanto:

$$b \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot \left(r - \frac{h}{2} \right),$$

da cui, con facili passaggi e tenendo conto che $b \neq 0$, si ricava $h = \frac{2}{5} r$. □

Soluzione al Problema 57

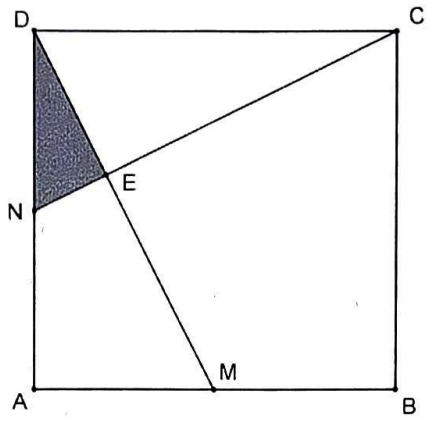


Si calcoli l'angolo $\widehat{HAE}$; esso vale $360° - 90° - 90° - \widehat{CAB} = 180° - \widehat{CAB}$. Per una proprietà goniometrica elementare[17], allora, $\sin \widehat{HAE} = \sin \widehat{CAB}$. Si può ora calcolare l'area del triangolo AHE tramite il Teorema 12.1: $\mathcal{A}_{AHE} = \frac{1}{2} AH \cdot AE \sin \widehat{HAE}$. Ma ricordando che, per costruzione, $AH = AC$ e $AE = AB$, risulta che $\mathcal{A}_{AHE} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \widehat{CAB}$, che è la stessa area del triangolo ABC. Con dimostrazione analoga si ottiene il medesimo risultato per BDG e CFL. □

Soluzione al Problema 58

Il ripostiglio, come si può vedere in figura, è il triangolo DNE. Si osservi banalmente che i triangoli DNC e AMD sono congruenti: AMD può essere ottenuto da DNC tramite una rotazione di 90 gradi in senso antiorario.

[17] Angoli supplementari hanno lo stesso valore del seno.

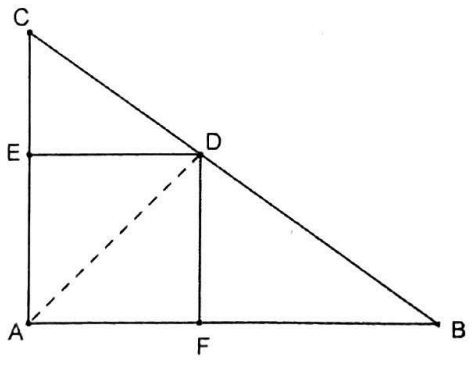


Ciò dimostra che i segmenti DM e NC sono perpendicolari. Quindi il triangolo DNE è simile al triangolo AMD, in quanto: a) sono ambedue rettangoli; b) hanno l'angolo $\widehat{MDA}$ in comune (Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3). Dunque è possibile istituire la seguente proporzione fra i loro lati: $DM : DN = AM : EN$. Ma $DM = 5\sqrt{5}$ (Teorema di Pitagora, 2.1) e $DN = AM = 5$; pertanto $EN = \sqrt{5}$, e, sempre per il Teorema di Pitagora, $DE = 2\sqrt{5}$. In conclusione, l'area di DNE sarà:

$$\frac{1}{2}NE \cdot ED = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5\,,$$

che è il valore cercato. □

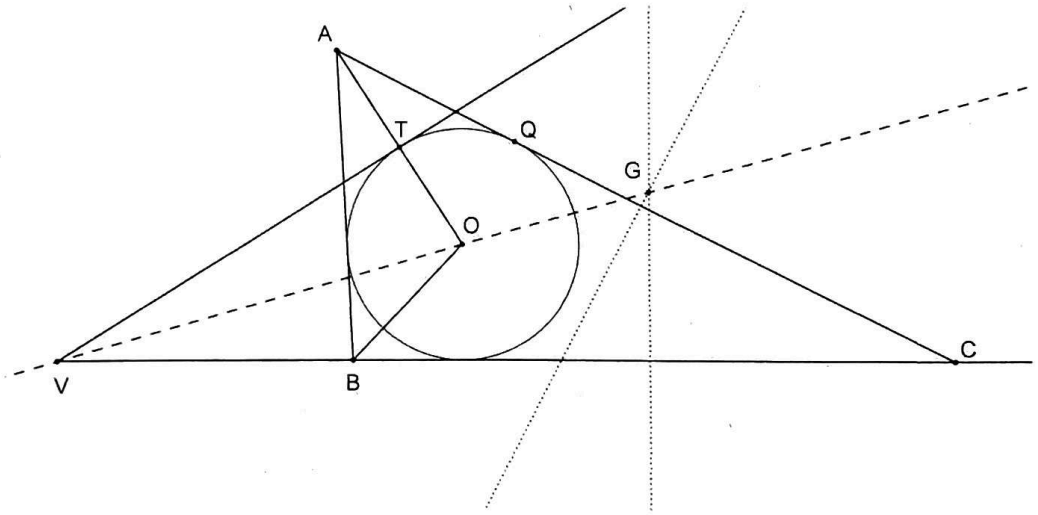
Soluzione al Problema 59



Per iniziare si riscriva la relazione richiesta nella forma $x \cdot AB + x \cdot AC = AB \cdot AC = 2\mathcal{A}$, dove si è indicata con $\mathcal{A}$ l'area di ABC. Si consideri ora il segmento AD: esso divide ABC nei due triangoli CAD e ABD. Risulta evidente che la somma delle aree di tali triangoli deve essere $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{CAD} = \mathcal{A}$. Ma $DE = x$ è altezza di CAD rispetto alla base AC, mentre $DF = x$ è altezza di ABD rispetto alla base AB. Pertanto $2\mathcal{A}_{ABD} + 2\mathcal{A}_{CAD} = x \cdot AB + x \cdot AC = 2\mathcal{A}$. Tale risultato, come detto, è equivalente alla tesi. □

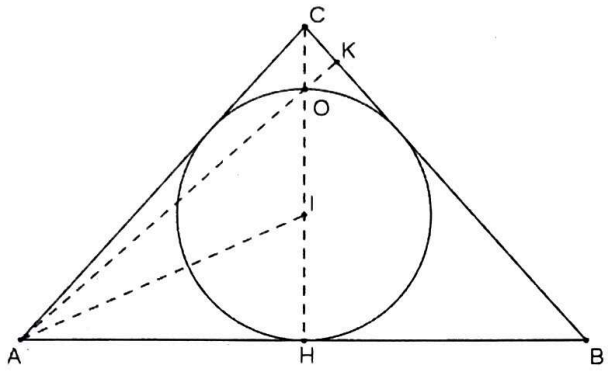
Soluzione al Problema 60

Sia T il punto medio del segmento AO e Q il punto di tangenza fra la circonferenza e AC. Il triangolo AOQ risulta rettangolo in Q (Lemma 3.10); inoltre $AO = 2r$ per costruzione e $OQ = r$, pertanto il triangolo AOQ è metà di un triangolo equilatero, e $\widehat{QAO} = 30°$. Ma AO è bisettrice di $\widehat{CAB}$ (Teorema 3.1), e quindi anche $\widehat{OAB} = 30°$. Sia ora $\alpha = \widehat{ABO} = \widehat{OBC}$ (Teorema 3.1); nel triangolo ABO l'angolo $\widehat{OAB} = 30°$, da cui $\widehat{BOA} = 150° - \alpha$ (Teorema 3.2).



Nel quadrilatero $VTOB$ la somma degli angoli interni è uguale a 360° (Lemma 3.3), pertanto: $\widehat{TVB} + \widehat{VBO} + \widehat{BOT} + \widehat{OTV} = 360°$, e cioè $\widehat{TVB} + 180° - \alpha + 150° - \alpha + 90° = 360°$, da cui $\widehat{TVB} = 2\alpha - 60°$ e quindi $\widehat{TVO} = \widehat{OVB} = \alpha - 30°$ (Teorema 3.1). Nel triangolo OVB, $\widehat{OVB} + \widehat{VBO} + \widehat{BOV} = 180°$ (Teorema 3.2), cioè $\widehat{OVB} + \widehat{VBO} + \widehat{BOV} = 180°$ e perciò $\alpha - 30° + 180° - \alpha + \widehat{BOV} = 180°$; ne segue che $\widehat{BOV} = 30°$. Si osservi ora che O è l'incentro di ABC (Teorema 5.5); è possibile allora applicare il Teorema 5.5 per ottenere che $\widehat{BOC} = 90° + \widehat{CAB}/2$. Noto che $\widehat{CAB}/2 = 30°$, risulta $\widehat{BOC} = 120°$. Sia quindi G il circocentro di ABC: dal Teorema 3.7 si deduce che $\widehat{CGB} = 2\widehat{CAB} = 120°$ (angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sulla medesima corda CB). Si è così ottenuto che il quadrilatero $BCGO$ è ciclico, perché gli angoli $\widehat{COB}$ e $\widehat{CGB}$, che insistono sul segmento BC, sono congruenti e uguali a 120° (Lemma 3.8). Il triangolo BCG è isoscele perché, essendo G il circocentro di ABC, $BG = GC$ (Teorema 5.7); ma il suo angolo $\widehat{CGB} = 120°$, dunque i due angoli alla base sono $\widehat{GBC} = \widehat{BCG} = 30°$. Per la ciclicità di $BCGO$, i suoi angoli opposti sono supplementari (Teorema 9.1): da ciò si deduce che $\widehat{GOB} = 150°$. In conclusione, $\widehat{BOV} + \widehat{GOB} = 30° + 150° = 180°$; quindi i punti V, O e G sono allineati, e G appartiene alla bisettrice VO, che è quanto si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 61



Si inizi ricordando due proprietà già utilizzate in precedenza: essendo I l'incentro, $\widehat{BIA} = 90° + \widehat{BCA}/2$ (Teorema 5.5), da cui $\widehat{HIA} = 45° + \widehat{BCA}/4$. Ed essendo O l'ortocentro, $\widehat{BOA} = 180° - \widehat{BCA}$ (si vedano il Lemma 5.12 e l'Esempio 5.8), e cioè $\widehat{HOA} = 90° - \widehat{BCA}/2$. Pertanto, grazie a proprietà trigonometriche elementari del triangolo rettangolo AHI: $IH = AH \tan \widehat{HIA} = AH \tan(45° + \widehat{BCA}/4)$; e allo stesso modo, nel triangolo rettangolo AHO, $OH = AH \tan \widehat{HOA} = AH \tan(90° - \widehat{BCA}/2)$. Dividendo termine a termine, e tenendo conto che $IH = 2OH$ perché rispettivamente diametro e raggio della circonferenza inscritta in ABC, si ricava che $\tan(45° + \widehat{BCA}/4) = 2\tan(90° - \widehat{BCA}/2)$. Si utilizzeranno ora, al primo membro dell'uguaglianza, le formule di addizione della tangente[18]:

$$\tan(45° + \widehat{BCA}/4) = \frac{1 + \tan(\widehat{BCA}/4)}{1 - \tan(\widehat{BCA}/4)}.$$

Al secondo membro, per una nota regola di simmetria, $\tan(90° - \widehat{BCA}/2) = \cot(\widehat{BCA}/2)$. Pertanto la precedente relazione diventa:

$$\frac{1 + \tan(\widehat{BCA}/4)}{1 - \tan(\widehat{BCA}/4)} = 2\cot(\widehat{BCA}/2).$$

In quest'ultima, tenendo conto del fatto che $\widehat{BCA}/2 = 2\widehat{BCA}/4$, si inserirà la formula di duplicazione per la cotangente[19]:

$$\cot(\widehat{BCA}/2) = \frac{1 - \tan^2(\widehat{BCA}/4)}{2\tan(\widehat{BCA}/4)}.$$

[18] $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.

[19] $\cot 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$.

Si ottiene infine la relazione

$$\frac{1+\tan(\widehat{BCA}/4)}{1-\tan(\widehat{BCA}/4)} = 2\frac{1-\tan^2(\widehat{BCA}/4)}{2\tan(\widehat{BCA}/4)}\,.$$

Conviene passare alla relazione contenente seni e coseni:

$$\frac{\cos(\widehat{BCA}/4)+\sin(\widehat{BCA}/4)}{\cos(\widehat{BCA}/4)-\sin(\widehat{BCA}/4)} = \frac{\cos^2(\widehat{BCA}/4)-\sin^2(\widehat{BCA}/4)}{\sin(\widehat{BCA}/4)\cos(\widehat{BCA}/4)}\,.$$

Con alcuni passaggi algebrici, e tenendo presente la prima relazione fondamentale della trigonometria, si ottiene:

$$\sin(\widehat{BCA}/4)\cos(\widehat{BCA}/4) = \frac{1}{3}\,;$$

si moltiplichi ora l'ultima relazione per 2:

$$2\sin(\widehat{BCA}/4)\cos(\widehat{BCA}/4) = \frac{2}{3}\,,$$

e, infine[20],

$$\sin(\widehat{BCA}/2) = \frac{2}{3}\,.$$

In conclusione, grazie alla formula di bisezione del seno[21]:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\widehat{BCA}}{2}} = \frac{2}{3}\,,$$

da cui, con facili passaggi, $\cos\widehat{BCA} = 1/9$. □

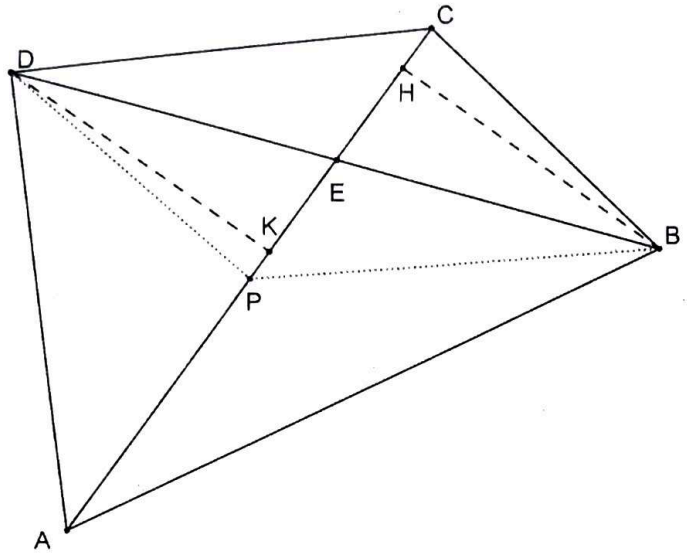
Soluzione al Problema 62

La condizione necessaria e sufficiente è che una delle due diagonali del quadrilatero incontri la seconda nel suo punto medio; e il punto P richiesto dal problema è il punto medio dell'altra diagonale.

Iniziamo con la dimostrazione della sufficienza: si prenda dunque il quadrilatero $ABCD$, siano AC e BD le sue diagonali, e sia E il loro punto di intersezione. Senza perdita di generalità, si può supporre che sia $BE = DE$. Sia inoltre P il punto medio dell'altra diagonale, AC. Siano infine H e K le proiezioni ortogonali di B e D, rispettivamente, su AC.

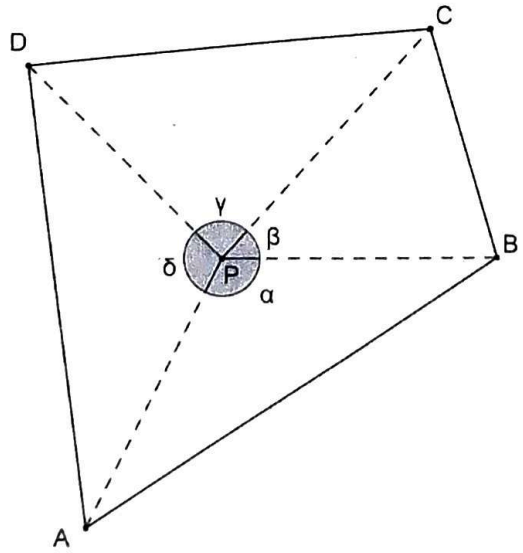
[20] Si è utilizzata la formula di duplicazione del seno: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

[21] $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.



Si osservi ora che i triangoli APD e PCD sono equiestesi: se si calcola la loro area sulle basi AP e PC, si ha che $AP = PC$ perché P è punto medio, e che l'altezza DK è comune. Allo stesso modo si conclude che sono equiestesi i triangoli ABP e BCP. Ma i triangoli rettangoli DKE e EBH sono congruenti: essi hanno infatti tutti gli angoli congruenti (sono ambedue rettangoli e $\widehat{KED} = \widehat{HEB}$ perché opposti al vertice) e hanno ipotenuse congruenti, $BE = DE$, per ipotesi. Ma allora anche $DK = BH$, e quindi i quattro triangoli ABP, BCP, CDP e DAP sono equivalenti.

Si dimostri la necessità: esista dunque un punto P interno al quadrilatero tale che le aree dei triangoli ABP, BCP, CDP e DAP siano uguali. Siano: $\alpha = \widehat{BPA}$, $\beta = \widehat{CPB}$, $\gamma = \widehat{DPC}$ e $\delta = \widehat{APD}$.



Ovviamente $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$. In base al Teorema 12.1, le aree dei quattro triangoli ABP, BCP, CDP e DAP valgono rispettivamente $\frac{1}{2}AP\cdot BP\sin\alpha$, $\frac{1}{2}BP\cdot CP\sin\beta$, $\frac{1}{2}CP\cdot DP\sin\gamma$, $\frac{1}{2}DP\cdot AP\sin\delta$. Si moltiplichino a due a due le aree di ciascuna coppia di triangoli opposti: $\mathcal{A}_{ABP}\cdot\mathcal{A}_{CDP}=\mathcal{A}_{BCP}\cdot\mathcal{A}_{DAP}$:

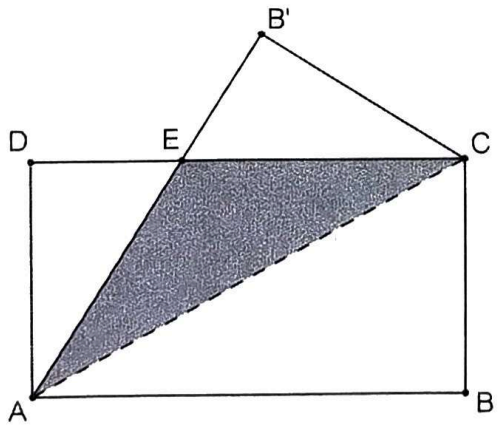
$$\frac{1}{2}AP\cdot BP\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}CP\cdot DP\sin\gamma=\frac{1}{2}BP\cdot CP\sin\beta\cdot\frac{1}{2}DP\cdot AP\sin\delta,$$

da cui si ottiene la relazione $\sin\alpha\sin\gamma=\sin\beta\sin\delta$. Si utilizzino le formule di somma e sottrazione del coseno[22]; la precedente relazione diventa:

$$\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)\,.$$

Si tenga ora presente che $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$; $\alpha+\gamma$ e $\beta+\delta$ sono angoli esplementari[23], e pertanto $\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\beta+\delta)$; inserendo quest'ultima nella relazione precedente, $\cos(\alpha-\gamma)=\cos(\beta-\delta)$. Da quest'ultima si possono dedurre due diverse possibilità[24]:
1) se $\alpha-\gamma$ e $\beta-\delta$ sono ambedue angoli positivi, o ambedue negativi, $\alpha-\gamma=\beta-\delta$, e cioè $\alpha+\delta=\beta+\gamma=180°$, e i punti B, P e D sono allineati;
2) se i due angoli $\alpha-\gamma$ e $\beta-\delta$ hanno segno opposto, $\alpha-\gamma=\delta-\beta$, da cui $\alpha+\beta=\delta+\gamma=180°$, e i punti A, P e C sono allineati.
Nel caso 1), P dev'essere il punto medio di BD e BD deve necessariamente bisecare AC (si veda la dimostrazione precedente); nel caso 2), P dev'essere il punto medio di AC e AC deve necessariamente bisecare BD. □

Soluzione al Problema 63



[22] $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.
[23] $\cos(2\pi-x)=\cos x$.
[24] Si tenga presente che $\alpha-\gamma$ e $\beta-\delta$ sono ambedue minori di un angolo piatto.

Il triangolo ACB' è congruente ad ABC perché simmetrico rispetto alla diagonale AC; quindi l'angolo $\widehat{EAC}$ è congruente a $\widehat{CAB}$; ma $\widehat{ACE} = \widehat{CAB}$ perché alterni interni fra rette parallele (Teorema 3.5). Ne segue che $\widehat{ACE} = \widehat{EAC}$, il triangolo ACE è isoscele, e $AE = EC$. Siano $x = AB$ e $y = BC$ i lati del rettangolo, e $z = AE = EC$. Si calcoli l'area richiesta (triangolo ACE) sulla base EC: $\mathcal{A} = EC \cdot BC/2 = zy/2$. Per il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) nel triangolo AED risulta: $z^2 = (x - z)^2 + y^2$. Sviluppando il quadrato e mettendo in evidenza z si ottiene:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2x},$$

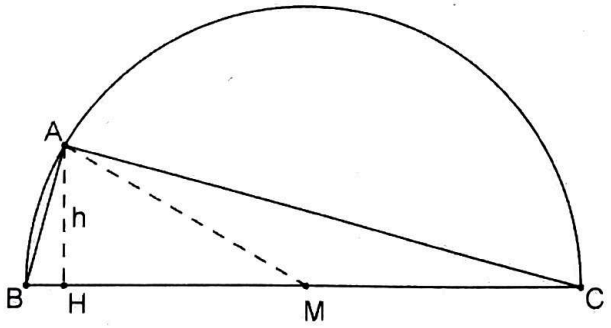
da cui, infine,

$$\mathcal{A} = \frac{zy}{2} = \frac{y(x^2 + y^2)}{4x},$$

che è il valore dell'area richiesta. □

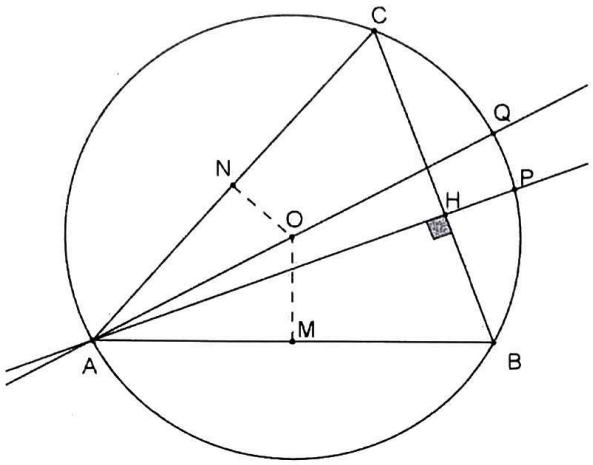
Soluzione al Problema 64

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa ha lunghezza pari alla metà dell'ipotenusa stessa, e pari al raggio della circonferenza circoscritta al triangolo (si vedano i Lemmi 3.9 e 5.8).



Sia ABC il triangolo, rettangolo in A: per quanto appena esposto, la mediana $AM = R$ e l'ipotenusa $BC = 2R$. La mediana è, per ipotesi, media proporzionale fra i cateti, e cioè $AM^2 = AB \cdot CA$. Ma il prodotto dei due cateti, $AB \cdot CA$, equivale al doppio dell'area di ABC. Se si calcola tale area rispetto alla base BC, ne risulta che l'altezza h relativa all'ipotenusa deve essere pari a metà del raggio. Infatti: $2\mathcal{A} = BC \cdot h = 2R \cdot h = AB \cdot CA = AM^2 = R^2$, e cioè $2R \cdot h = R^2$, da cui appunto $h = R/2$. Si osservi ora che il triangolo rettangolo AHM ha $AH = h = R/2$ e $AM = R$: pertanto esso è metà di un triangolo equilatero, e l'angolo $\widehat{HMA}$ vale 30 gradi. Ma allora $\widehat{AMC} = 180° - 30° = 150°$. Il triangolo AMC è isoscele, perché due suoi lati sono raggi (AM ed MC); quindi $\widehat{CAM} = \widehat{MCA} = (180° - 150°)/2 = 15°$ (Teorema 3.2). Sempre per il Teorema 3.2, $\widehat{ABC} = 75°$. □

Soluzione al Problema 65



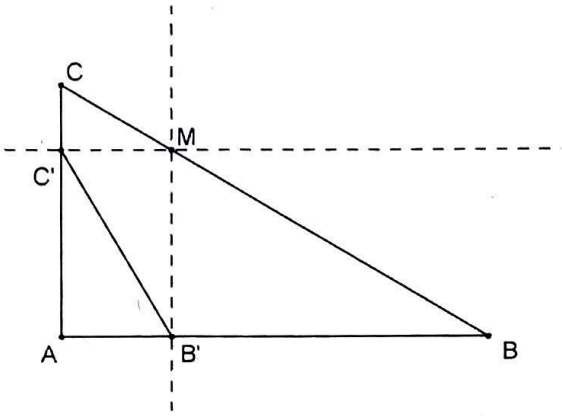
(a) Nel triangolo ABH (dove H è il piede dell'altezza), si calcoli $\widehat{HAB} = 90° - \widehat{ABH}$. Ma $\widehat{ABH} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ perché rispettivamente angolo alla circonferenza e angolo al centro che insistono sul medesimo arco AC (Teorema 3.7). Ora, il triangolo AOC è isoscele in quanto $AO = OC$, raggi della circonferenza circoscritta ad ABC, e quindi $\widehat{CAO} = \widehat{OCA}$; ma allora $\widehat{AOC} = (180° - 2\widehat{CAO})$. Basta ora applicare una catena di uguaglianze: $\widehat{HAB} = 90° - \widehat{ABH} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90° - \frac{1}{2}(180° - 2\widehat{CAO}) = \widehat{CAO}$. Ma $\widehat{CAO}$ è lo stesso angolo indicato nell'ipotesi, pertanto la parte (a) risulta dimostrata.

(b) Per quanto appena dimostrato al punto (a), gli archi CQ e PB sono congruenti (sottesi da angoli congruenti, Teorema 3.7). Quindi anche gli angoli $\widehat{PCB}$ e $\widehat{CBQ}$ sono congruenti. Ma $\widehat{BPC} = \widehat{BQC}$ perché ambedue angoli alla circonferenza che insistono su BC. I triangoli BCP e CBQ hanno due angoli congruenti, e per conseguenza anche il terzo (Teorema 3.2); ma avendo BC in comune, essi sono congruenti.

(c) Si inizi col dimostrare che i quadrilateri $ABPC$ e $ABQC$ sono equiestesi: infatti $\mathcal{A}_{ABPC} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{BPC}$ mentre $\mathcal{A}_{ABQC} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{CBQ}$; ma i triangoli BCP e CBQ sono congruenti, pertanto il lemma è dimostrato. Ora, il quadrilatero $AMON$ è formato dal triangolo AMN e il triangolo NMO; a essendo N, e M rispettivamente punti medi di CA e AB, i triangoli AMN e ABC risultano simili con rapporto di similitudine 2 (Teorema 4.6). Ma anche i triangoli NMO e CBQ sono simili, in quanto hanno tutti i lati in proporzione pari a 2 (Terzo criterio di similitudine, Teorema 4.5). Ma per il Teorema 4.1, dove il rapporto fra lati è 2, il rapporto fra le aree è 4. Quindi il quadrilatero $ABQC$, e anche $ABPC$ che è ad esso equiesteso, ha area quadrupla del quadrilatero $AMON$. □

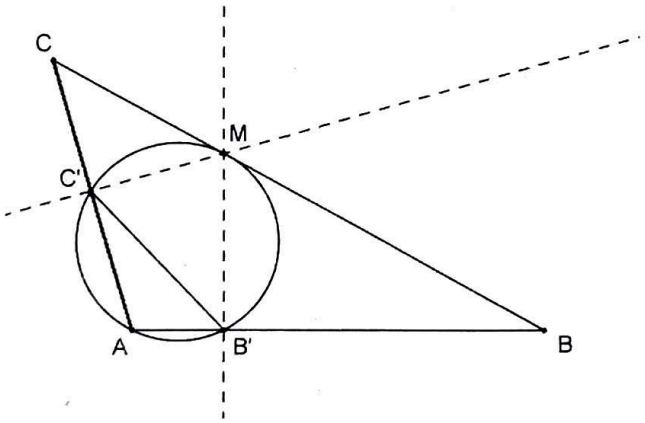
Soluzione al Problema 66

Iniziamo dalla versione semplificata del problema.

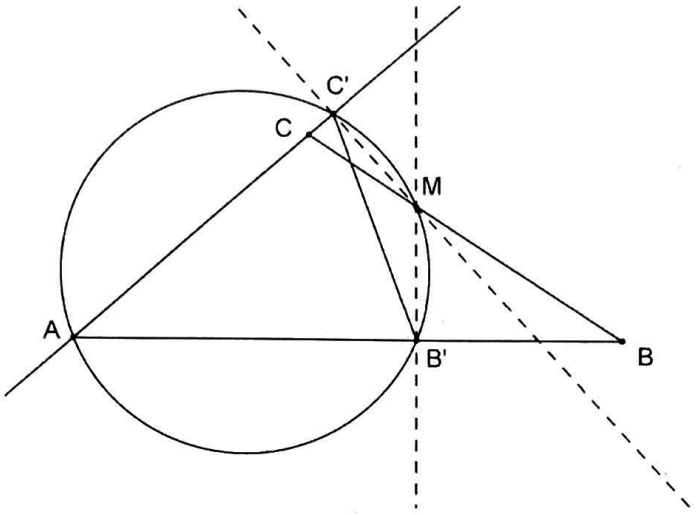


Si osservi che il quadrilatero $AB'MC'$ è un rettangolo, e che $B'C'$ è una sua diagonale. Ma se si prende in considerazione l'altra diagonale, AM, essa è un segmento che congiunge il vertice A a un punto M dell'ipotenusa. Tale segmento avrà lunghezza minima se AM è perpendicolare all'ipotenusa, cioè se M è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa stessa.

Risolviamo il caso generale.



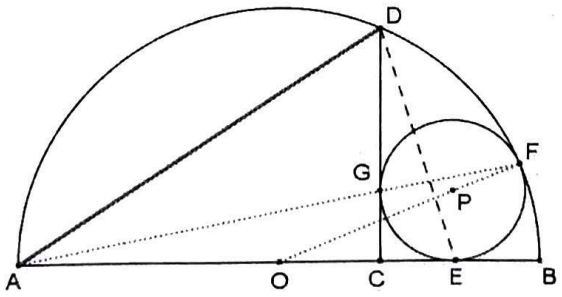
Si consideri il caso in cui ABC sia acutangolo, oppure abbia un angolo ottuso in A. Il quadrilatero $AB'MC'$ è ciclico, perché i suoi due angoli opposti $\widehat{MC'A}$ e $\widehat{AB'M}$, essendo retti per ipotesi, sono supplementari (Teorema 9.1). Nella circonferenza circoscritta ad $AB'MC'$ la corda AM è un diametro, perché sottesa da angoli alla circonferenza retti (Lemma 3.9). Si consideri ora la corda $B'C'$: essa è sottesa, al variare di M, da un angolo alla circonferenza di ampiezza fissata ($\widehat{CAB}$). Pertanto tale corda avrà la lunghezza minima possibile quando la circonferenza sarà la più piccola possibile. Il diametro minimo della circonferenza si otterrà quando è minimo il valore di AM, e cioè, analogamente al caso precedente, quando M è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa.



Sia invece ABC ottusangolo in C (il caso dell'angolo ottuso in B si risolve in modo analogo): per lo stesso ragionamento di prima, il quadrilatero $AB'MC'$ è ciclico, con AM per diametro; come prima, il segmento $B'C'$ è sotteso da un angolo fissato, $\widehat{CAB}$, e quindi sarà minimo quando la circonferenza ha diametro minimo. Ora però, essendo il punto M vincolato sul segmento BC, il punto di BC avente minima distanza da A sarà l'estremo C del segmento, e non il piede dell'altezza, perché questo cade al di fuori di BC. □

Soluzione[25] al Problema 67

I punti O, P e F sono allineati, perché sia il raggio OF della semicirconferenza grande sia il raggio PF della circonferenza piccola sono perpendicolari alla tangente (comune) nel punto F (Lemma 3.10). Sia G il punto di tangenza fra la circonferenza piccola e il segmento CD.

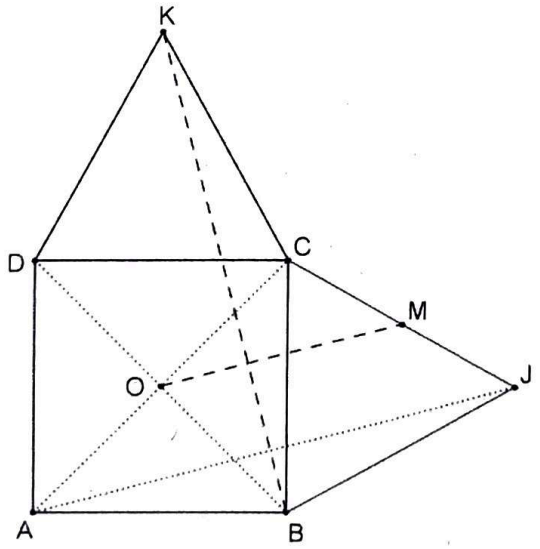


Si consideri il segmento GP: essendo esso raggio di tangenza in G, è perpendicolare alla tangente CD (Lemma 3.10), e pertanto è parallelo ad AB. Da ciò segue che $\widehat{AOF} = \widehat{GPF}$, in quanto angoli corrispondenti fra rette parallele (Teorema 3.5). Ma

[25] Sono grato ad Alberto Cagnetta per il suo prezioso contributo allo svolgimento di questo problema.

allora i triangoli AOF e GPF sono simili, perché ambedue sono isosceli ($AO = OF$ raggi della semicirconferenza; $GP = PF$ raggi della circonferenza di centro P), e hanno quindi una coppia di lati in proporzione, e $\widehat{AOF} = \widehat{GPF}$, come appena dimostrato (Secondo criterio di similitudine, Teorema 4.4). I punti A, G e F sono necessariamente allineati, ed è dunque possibile applicare il Teorema della tangente e della secante (Teorema 10.3) alla circonferenza di centro P: $AG : AE = AE : AF$, cioè $AE^2 = AG \cdot AF$ (1). Si consideri ora il triangolo ABD, rettangolo in D in quanto inscritto in una semicirconferenza (Lemma 3.9). Se si applica in esso il Primo teorema di Euclide (Teorema 4.8), si ottiene $AB : AD = AD : AC$, e cioè $AD^2 = AC \cdot AB$ (2).
Si vuole dimostrare la similitudine dei triangoli ACG e ABF: si ha che essi sono ambedue rettangoli, perché $\widehat{ACD}$ è retto per ipotesi e ABF è inscritto in una semicirconferenza (Lemma 3.9), quindi $\widehat{BFA}$ è retto; ma tali triangoli hanno l'angolo $\widehat{GAO}$ in comune, e perciò hanno tutti gli angoli congruenti (Primo criterio di similitudine, Teorema 4.3). Vale allora la seguente proporzione: $AC : AG = AF : AB$, da cui $AC \cdot AB = AG \cdot AF$ (3). Riprendiamo ora le relazioni (1) e (2): $AE^2 = AG \cdot AF$ e $AD^2 = AC \cdot AB$. Dall'eguaglianza (3) si deduce che $AE^2 = AD^2$, e quindi $AE = AD$. Il triangolo AED, in conclusione, è isoscele. □

Soluzione al Problema 68

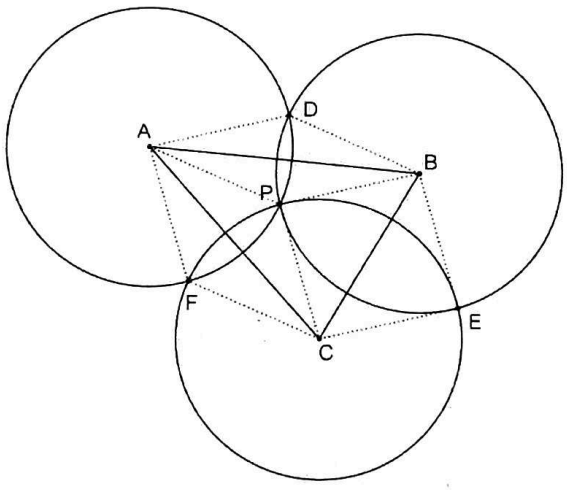


Per ipotesi i triangoli BCJ e CDK sono congruenti; quindi, in particolare, $\widehat{CBJ} = \widehat{DCK}$. I triangoli ABJ e BCK sono congruenti: essi infatti hanno $AB = BC$ in quanto lati di un quadrato; $BJ = CK$ per ipotesi; $\widehat{ABJ} =$

$90° + \widehat{CBJ} = 90° + \widehat{DCK} = \widehat{KCB}$[26]. In particolare, BCK si può ottenere da ABJ tramite una rotazione di 90° in senso antiorario (e un'opportuna traslazione): ma essendo AB perpendicolare a BC (lati consecutivi di un quadrato), risulta che anche AJ è perpendicolare a BK. Si noti ora che nel triangolo AJC il segmento OM congiunge O, punto medio del lato AC, con M, punto medio del lato CJ: pertanto OM è parallelo ad AJ (Teorema 4.6). Quindi anche il segmento OM è perpendicolare a BK, che è quanto si doveva dimostrare. □

Soluzione al Problema 69

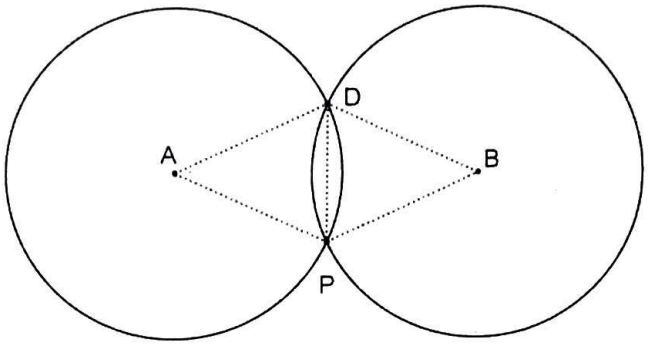
Sono possibili due casi, a seconda che le tre intersezioni siano a due a due disgiunte oppure no. Iniziamo dal primo caso.



Il segmento AB è perpendicolare alla corda DP (Lemma 3.10); pertanto, essendo il triangolo PDA isoscele perché $AD = AP = 1$, il segmento AB è anche bisettrice (Teorema 5.9). Dunque vale l'uguaglianza $\widehat{DAB} = \widehat{BAP}$. Ma $DAPB$ è un rombo (Teorema 8.1), quindi $\widehat{DAB} = \widehat{BAP} = \widehat{ABD} = \widehat{PBA}$; sia α l'ampiezza di tali angoli. Allo stesso modo si dimostra che $\widehat{CBP} = \widehat{EBC} = \widehat{PCB} = \widehat{BCE}$; siano pari a β tali angoli. E infine, sia $\gamma = \widehat{PCA} = \widehat{ACF} = \widehat{PAC} = \widehat{CAF}$. Si osservi che gli angoli interni de triangolo ABC valgono $\alpha + \gamma$, $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$; pertanto $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ (Teorema 3.2).

Si calcoli ora l'area della superficie comune a due cerchi aventi raggio 1 e distanza fra i centri minore di 2.

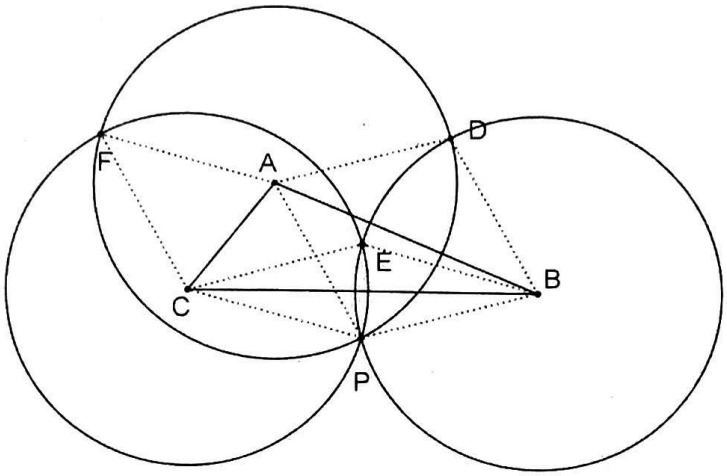
[26] Primo criterio di congruenza.



L'area cercata è il doppio della differenza fra l'area del segmento circolare APD e quella del triangolo APD. Detto α (come fatto sopra) l'angolo $\widehat{DAB}$, l'area del settore è pari ad α, misurato in radianti[27]; l'area del triangolo APD, tenendo conto che il raggio è unitario, è pari a $(1/2)\sin 2\alpha$ (Teorema 12.1). Quindi l'area della parte comune ai cerchi sarà: $2\alpha - \sin 2\alpha$. Nell'ipotesi in cui le aree comuni ai cerchi siano a due a due disgiunte, l'area totale sarà: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma - (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \pi - (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$. L'area avrà il valore minimo quando il termine $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ assumerà il suo valore massimo. Si consideri ora il seguente lemma: il valore massimo è ottenuto quando i tre angoli 2α, 2β e 2γ sono uguali; e cioè, dal momento che $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, se $\alpha = \beta = \gamma = 30°$. In tal caso l'area è $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dimostriamo ora il lemma con un artificio: si consideri il triangolo ABC: P è il suo circocentro, in quanto è equidistante dai vertici (Teorema 5.7). La sua area si può trovare come somma delle aree di BAP, CBP e ACP: $\mathcal{A} = (1/2)\sin\widehat{APB} + (1/2)\sin\widehat{BPC} + (1/2)\sin\widehat{CPA} = (1/2)(\sin\widehat{APB} + \sin\widehat{BPC} + \sin\widehat{CPA})$. Ma tenendo conto che i triangoli BAP, CBP e ACP sono tutti isosceli (due dei loro lati sono raggi) e che i loro angoli alla base valgono rispettivamente α, β e γ, risulta che $\widehat{APB} = \pi - 2\alpha$, $\widehat{BPC} = \pi - 2\beta$ e $\widehat{CPA} = \pi - 2\gamma$. Si ricordi ora che $\sin(\pi - x) = \sin x$: ne segue che $\sin\widehat{APB} = \sin 2\alpha$, $\sin\widehat{BPC} = \sin 2\beta$ e $\sin\widehat{CPA} = \sin 2\gamma$. Quindi l'area di ABC si calcolerà in questo modo: $\mathcal{A} = (1/2)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$. Tale area è massima quando è massima la somma $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$; ma è noto che fra tutti i triangoli inscritti in una circonferenza, quello di area massima è il triangolo equilatero. ABC sarà equilatero se $\alpha = \beta = \gamma = 30°$; e con ciò il lemma è dimostrato.

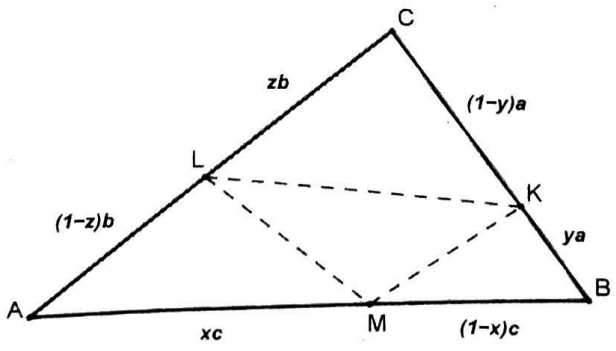
Si consideri da ultimo il secondo caso, in cui le tre aree non siano a due a due disgiunte (si veda a titolo di esempio la figura seguente).

[27] Ciò discende immediatamente dalla definizione di radiante. Si veda in proposito un qualsiasi manuale di trigonometria.



L'area richiesta dal problema si troverà sommando le parti comuni ai cerchi di centro A e C e di centro A e B, e quindi sottraendo la superficie comune alle circonferenze di centro B e C. È però facile rendersi conto che per ottenere questa configurazione deve esistere almeno una coppia di circonferenze in cui ciascuna delle due contiene il centro dell'altra (in figura sono quelle di centro A e C). In tal caso l'area della superficie comune a tale coppia di cerchi risulta sicuramente maggiore dell'area che avrebbero in comune due cerchi, ciascuno dei quali ha la circonferenza passante per il centro del secondo. Tale area, come si può facilmente calcolare, è $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$, che a sua volta è maggiore di $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Pertanto questo caso porterà sempre ad avere aree maggiori rispetto al caso precedente. □

Soluzione al Problema 70



Siano a, b e c i lati del triangolo ABC opposti rispettivamente ai vertici A, B e C. Il punto M divide il lato AB in due segmenti AM e MB. Sia dunque $AM = xc$ e $MB = (1-x)c$, dove x è un numero reale positivo minore di 1; allo stesso modo si chiameranno $BK = ya$, $KC = (1-y)a$, $CL = zb$, $LA = (1-z)b$, con y

e z reali positivi minori di 1. L'area del triangolo ABC può essere calcolata in modo equivalente come $\frac{1}{2}ab\sin\widehat{BCA}$, $\frac{1}{2}bc\sin\widehat{CAB}$, $\frac{1}{2}ca\sin\widehat{ABC}$ (Teorema 12.1). Si calcolino ora le aree dei tre triangoli MAL, KBM e LCK:

$$\mathcal{A}_{MAL} = \frac{1}{2}xc(1-z)b\sin\widehat{CAB}\,,$$

$$\mathcal{A}_{KBM} = \frac{1}{2}ya(1-x)c\sin\widehat{ABC}\,,$$

$$\mathcal{A}_{LCK} = \frac{1}{2}zb(1-y)a\sin\widehat{BCA}\,.$$

Per ciascuna di queste aree si calcoli il rapporto con l'area di ABC:

$$\frac{\mathcal{A}_{MAL}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}xc(1-z)b\sin\widehat{CAB}}{\frac{1}{2}bc\sin\widehat{CAB}} = x(1-z)\,;$$

allo stesso modo:

$$\frac{\mathcal{A}_{KBM}}{\mathcal{A}_{ABC}} = y(1-x) \quad , \quad \frac{\mathcal{A}_{LCK}}{\mathcal{A}_{ABC}} = z(1-y)\,.$$

Si vuole dimostrare che ameno uno di questi tre rapporti è minore di 1/4. Si motiplichino fra loro i rapporti:

$$\frac{\mathcal{A}_{MAL}}{\mathcal{A}_{ABC}}\cdot\frac{\mathcal{A}_{KBM}}{\mathcal{A}_{ABC}}\cdot\frac{\mathcal{A}_{LCK}}{\mathcal{A}_{ABC}} = x(1-z)y(1-x)z(1-y) = \\ = x(1-x)y(1-y)z(1-z)\,.$$

Si applichi ora la Disuguaglianza AM-GM (Teorema 13.4) ai primi due fattori dell'ultimo prodotto, nel seguente modo:

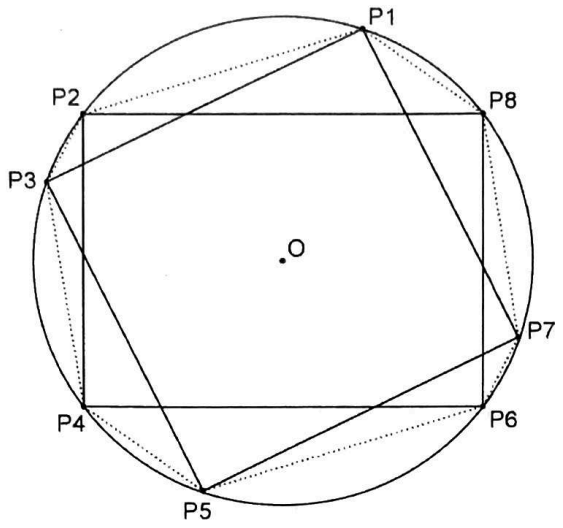
$$\sqrt{x(1-x)} \le \frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

e quindi $x(1-x) \le 1/4$; allo stesso modo si avrà $y(1-y) \le 1/4$ e $z(1-z) \le 1/4$. Pertanto

$$\frac{\mathcal{A}_{MAL}}{\mathcal{A}_{ABC}}\cdot\frac{\mathcal{A}_{KBM}}{\mathcal{A}_{ABC}}\cdot\frac{\mathcal{A}_{LCK}}{\mathcal{A}_{ABC}} \le \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}\,.$$

Se tutti e tre i rapporti fossero maggiori di 1/4, ciò sarebbe in contraddizione con la disuguaglianza appena dimostrata. In conclusione, almeno uno dei tre dovrà essere minore di 1/4 (o eventualmente uguale, nel caso i rapporti fossero tutti uguali fra loro e uguali a 1/4). □

Soluzione al Problema 71

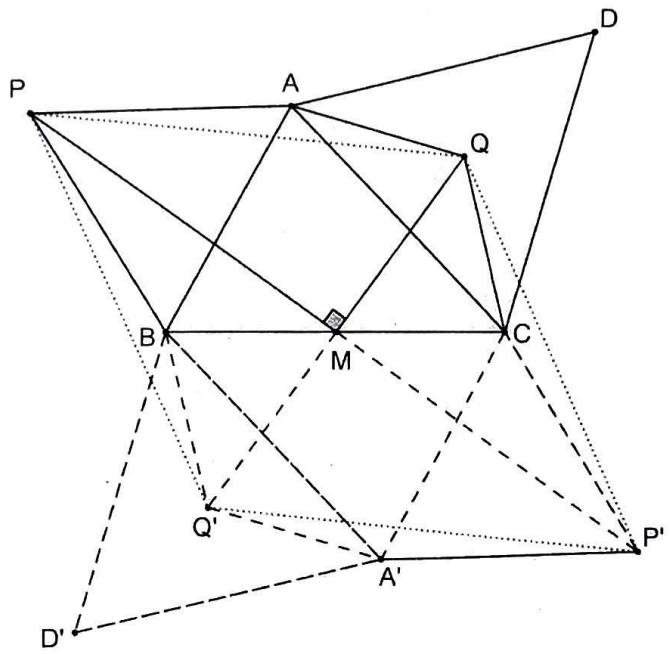


Essendo noto il lato del quadrato ($\sqrt{5}$), ne segue che il raggio della circonferenza è pari a metà della diagonale, e cioè $d = \sqrt{10}$ e $r = \sqrt{10}/2$. Ma allora anche le dimensioni del rettangolo sono determinate: infatti, dette a e b le lunghezze dei suoi lati, si ha che $a \cdot b = 4$ per ipotesi, e che $a^2 + b^2 = \sqrt{10}$ per il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1). Risolvendo il sistema di equazioni si ottengono le due coppie di soluzioni $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$ e $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Senza alcuna perdita di generalità poniamo $a = P_4P_6 = P_8P_2 = 2\sqrt{2}$ e $b = P_2P_4 = P_6P_8 = \sqrt{2}$. L'area totale dell'ottagono non dipende dunque dalle dimensioni del quadrato e del rettangolo, che sono fissate, bensì solo dalla disposizione dei punti sulla circonferenza (fermo restando che i punti sono ordinati, da P_1 a P_8). L'area dell'ottagono può essere calcolata come somma dell'area del rettangolo e di quattro triangoli: $P_2P_8P_1$, $P_4P_2P_3$, $P_6P_4P_5$ e $P_8P_6P_7$. Il primo e il terzo di tali triangoli hanno base pari ad $a = P_4P_6 = P_8P_2 = 2\sqrt{2}$, mentre il secondo e il quarto hanno base $b = P_2P_4 = P_6P_8 = \sqrt{2}$; per ciascuno di essi l'area sarà massima quando l'altezza assume il valore massimo possibile, cioè quando il terzo vertice ha la massima distanza dalla base. Ciò accadrà quando le diagonali del quadrato $P_1P_3P_5P_7$ saranno parallele ai lati del rettangolo $P_2P_4P_6P_8$, e cioè quando P_1 è punto medio dell'arco P_8P_2, P_3 è punto medio dell'arco P_2P_4, e così via. A questo punto l'area dell'ottagono è calcolabile in modo semplice con la somma appena descritta:

$$\mathcal{A}_{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8} = a \cdot b + 2\left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{d-b}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}b \cdot \frac{d-a}{2}\right);$$

Dopo facili calcoli si ottiene che l'area è $3\sqrt{5}$. □

Soluzione al Problema 72



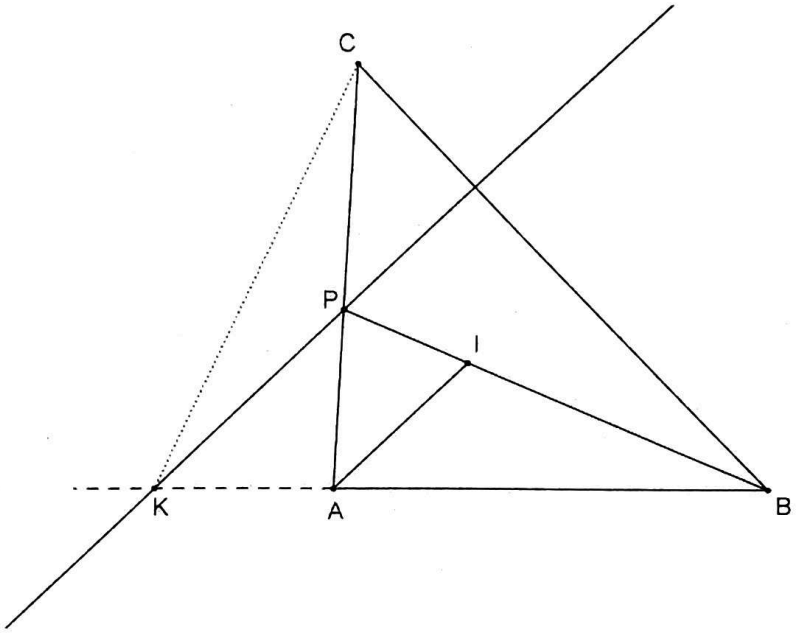
Si osservi che non è necessario disegnare su AB un intero esagono: basta tracciare un triangolo equilatero, di cui P sarà il vertice diverso da A e da B. Dall'altra parte, il triangolo ACQ è isoscele con angoli alla base di 30 gradi (si veda il Teorema 5.9). Per la soluzione utilizziamo il seguente artificio: si tracci il punto A' simmetrico di A rispetto a M e si costruisca il triangolo $BA'C$. Esternamente sui lati di $BA'C$ si facciano le stesse costruzioni precedenti, in modo da avere $A'P'C$ equilatero e $BQ'A'$ congruente ad ACQ. Si noti ora che per motivi di simmetria il segmento MP' giace sul prolungamento di PM mentre MQ' giace sul prolungamento di QM. Il quadrilatero $PQ'P'Q$ è un parallelogramma: i suoi lati opposti sono infatti a due a due congruenti (Teorema 8.1), perché costruiti con lo stesso procedimento su figure simmetriche.

Lemma: dimostriamo che vale la congruenza $\widehat{QAP} = \widehat{Q'BP}$. $\widehat{BAP} = 60°$ e $\widehat{QAC} = 30°$, da cui $\widehat{QAP} = \widehat{CAB} + 30° + 60° = \widehat{CAB} + 90°$. D'altra parte $\widehat{Q'BP} = 360° - \widehat{PBA} - \widehat{ABC} - \widehat{CBA'} - \widehat{A'BQ'}$. Ma $\widehat{PBA} = 60°$, $\widehat{CBA'} = \widehat{BCA}$ per costruzione, $\widehat{A'BQ'} = 30°$; sostituendo queste relazioni nel calcolo per $\widehat{Q'BP}$ si ricava: $\widehat{Q'BP} = 360° - 60° - \widehat{ABC} - \widehat{BCA} - 30° = 270° - \widehat{ABC} - \widehat{BCA}$. Ma la somma degli angoli interni del triangolo ABC è un angolo piatto (Teorema 3.2), perciò $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180° - \widehat{CAB}$, da cui si ottiene $\widehat{Q'BP} = 90° + \widehat{CAB}$. Dunque gli angoli $\widehat{QAP}$ e $\widehat{Q'BP}$ sono congruenti e il lemma è dimostrato.

Vogliamo ora dimostrare che i triangoli APQ e PBQ' sono congruenti. Essi infatti hanno: $AP = PB$ perché lati di un triangolo equilatero; $AQ = BQ'$ perché lati obliqui dei triangoli isosceli $BQ'A'$ e ACQ, congruenti per costruzione; $\widehat{QAP} = \widehat{Q'BP}$,

per il lemma poc'anzi dimostrato[28]. Ne consegue che i segmenti PQ e PQ' sono congruenti. Il parallelogramma $PQ'P'Q$ è quindi un rombo (parallelogramma con lati consecutivi congruenti, Teorema 8.1). I segmenti PP' e QQ', che si intersecano in M, sono le sue diagonali; ma le diagonali di un rombo sono perpendicolari (Teorema 8.1), e con ciò la tesi è dimostrata. □

Soluzione al Problema 73

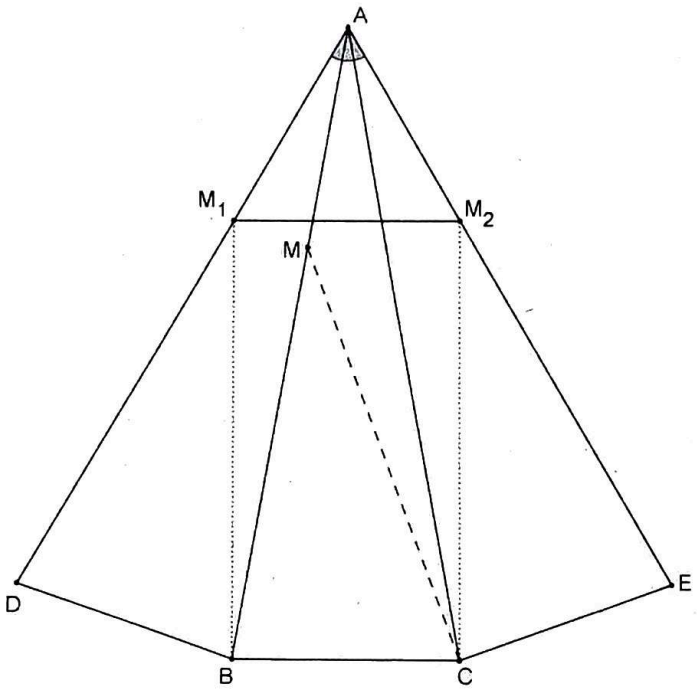


Si osservi che, essendo I l'incentro, il segmento AI è la bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ (Teorema 5.5); pertanto $\widehat{PAI} = \widehat{IAB}$. Sia ora K l'intersezione fra il prolungamento di AB dalla parte di A e la parallela ad AI passante per P: risulta che $\widehat{PKA} = \widehat{IAB}$ perché angoli corrispondenti fra rette parallele (Teorema 3.5), e che $\widehat{APK} = \widehat{PAI}$ perché alterni interni (Teorema 3.5). Ne consegue che $\widehat{PKA} = \widehat{APK}$ e quindi che il triangolo KAP è isoscele. Ma allora $AK = AP$; ricordando che, per ipotesi, $BC = AB + AP$, si ottiene che $BC = AB + AK = BK$, e pertanto che il triangolo BCK è isoscele. Dunque P appartiene alla bisettrice del triangolo isoscele BCK; ma tale bisettrice è anche asse del segmento CK (Teorema 5.9). Di conseguenza P è punto appartenente all'asse di CK, quindi $PC = PK$ e anche il triangolo PCK è isoscele. Si osservi che i triangoli ABI e KBP sono simili (Teorema 4.6), e che perciò vale la proporzione $AB : AI = BK : PK$ (1). Applicando il Teorema della bisettrice (Teorema 5.6) si ha la seguente proporzione: $AB : AP = BC : PC$. Ricordando che $BC = BK$ e che $PC = PK$, quest'ultima diviene $AB : AP = BK : PK$ (2). Confrontando le proporzioni (1) e (2) si ricava $AB : AI = AB : AP$, da cui $AI = AP$, che è quanto si voleva dimostrare. □

[28] Primo criterio di congruenza.

Soluzione al Problema 74

Per risolvere l'esercizio si usi il seguente artificio: si traccino, a fianco del triangolo ABC di partenza, due triangoli ADB e ACE congruenti ad ABC, aventi in comune con ABC stesso i lati AB e AC rispettivamente.



Si tracci su AD il punto M_1 in modo che sia $AM_1 = AM = BC$, e su AE il punto M_2 in modo che sia $AM_2 = AM = BC$. L'angolo M_2AM_1 vale 60 gradi, perché è somma di tre angoli consecutivi ciascuno dei quali ha ampiezza 20 gradi; ma il triangolo AM_1M_2 è isoscele perché $AM_1 = AM_2$ per costruzione. Ne consegue che AM_1M_2 è equilatero, e quindi $M_1M_2 = AM_1 = AM_2 = BC$; ma per la simmetria della figura si ha che $BM_1 = CM_2$, e che il quadrilatero BCM_2M_1 è un parallelogramma (lati opposti congruenti, Teorema 8.1). Sempre per la simmetria della figura, anche gli angoli del quadrilatero BCM_2M_1 devono essere congruenti, quindi esso è un rettangolo (Teorema 8.1). Pertanto vale la seguente relazione:

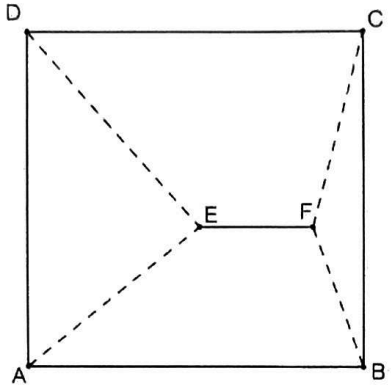
$$\widehat{M_1BA} = \widehat{M_1BC} - \widehat{ABC} = 90° - 80° = 10°;$$

ma allora

$$\widehat{DBM_1} = \widehat{DBA} - \widehat{M_1BA} = 80° - 10° = 70°.$$

L'angolo $\widehat{DBM_1}$ corrisponde, nel triangolo ADB, all'angolo $\widehat{BCM}$ in ABC, e $\widehat{BCM}$ vale 70 gradi. □

Soluzione al Problema 75



L'area dell'esagono è la somma dell'area di due trapezi: $ABFE$ e $CDEF$. Dette h_1 e h_2, rispettivamente, le altezze di $ABFE$ e di $CDEF$, l'area vale:

$$\mathcal{A}_{ABFCDE} = \mathcal{A}_{ABFE} + \mathcal{A}_{CDEF} = \\ = \frac{(AB + EF) \cdot h_1}{2} + \frac{(CD + EF) \cdot h_2}{2} = 2h_1 + 2h_2 = 2(h_1 + h_2)\,.$$

Ma la somma $h_1 + h_2$ equivale al lato del quadrato, e quindi a 3 metri. L'area dell'esagono è dunque 6, e la risposta corretta pertanto è la c. Si noti che l'area dell'esagono è indipendente dalla posizione del segmento EF all'interno del quadrato, purché questo sia parallelo alle basi. □

Soluzione al Problema 76

Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo vale $r = A/p$ (Lemma 5.10). Siano a l'ipotenusa e b e c i cateti: la relazione precedente diviene $r = bc/(a + b + c)$. Si proceda ora con il seguente artificio:

$$r = \frac{bc}{a+b+c} \cdot \frac{a-(b+c)}{a-(b+c)} = \frac{bc(a-b-c)}{a^2-(b+c)^2}\,.$$

Ma per il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1), $a^2 = b^2 + c^2$. Pertanto, sviluppando il quadrato al denominatore e semplificando, si ottiene:

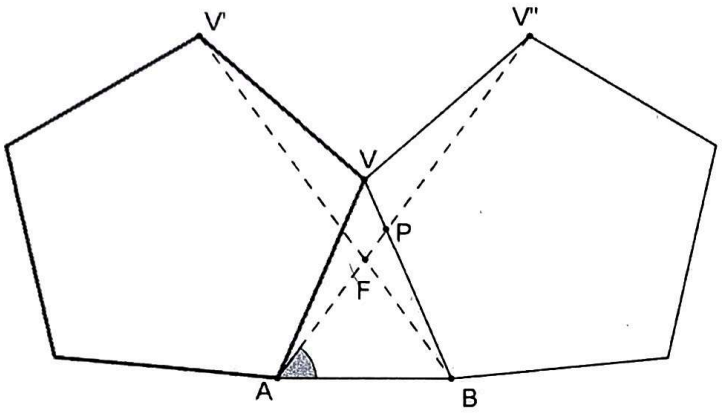
$$r = \frac{bc(a-b-c)}{-2bc} = \frac{b+c-a}{2}\,.$$

Resta ora da dimostrare che il numero $b + c - a$ sia sempre pari. Osserviamo che a, b e c sono interi perché il triangolo è pitagorico. Valgono i seguenti casi: a) se b e c hanno la stessa parità, $b^2 + c^2$ è un numero pari, quindi a è pari, e $b + c - a$ è pari. b) se b e c hanno parità opposta, $b^2 + c^2$ è dispari, e pertanto a è dispari; ma nuovamente $b+c-a$ è pari[29]. In conclusione, r è sempre un numero intero. □

[29] La breve dimostrazione qui riportata è conseguenza di una nota proprietà delle terne pitagoriche: ogni terna può essere formata da due numeri dispari e uno pari, oppure da tre numeri pari.

Soluzione al Problema 77

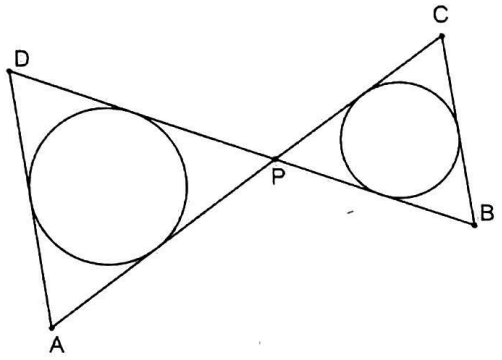
Nella figura è indicato il caso particolare con $n = 5$.



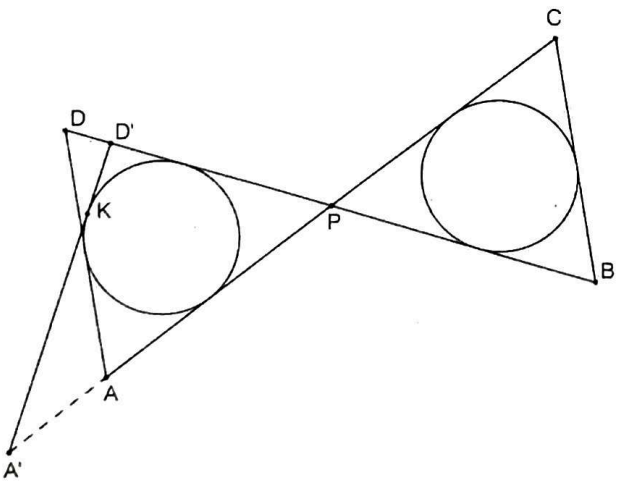
La dimostrazione qui proposta sarà riferita al caso $n = 5$, e sarà poi generalizzata al caso con n qualsiasi. Si inizi osservando che ovviamente gli angoli $\widehat{ABV'}$ e $\widehat{V"AB}$ sono congruenti perché la figura è simmetrica rispetto all'asse del segmento AB. Il triangolo $AV"V$ è isoscele, perché $AV = VV"$ (lati di pentagoni congruenti). Quindi gli angoli $\widehat{VAV"}$ e $\widehat{AV"V}$ sono congruenti. Si osservi che le stesse caratteristiche sono condivise anche dal triangolo BVV', che è congruente a $AV"V$; in particolare, $\widehat{AV"V} = \widehat{V'BV}$. Siano ora F il punto di incontro fra $AV"$ e BV', e P il punto di incontro fra $AV"$ e BV. I triangoli BPF e $VPV"$ sono simili per il Primo criterio di similitudine (Teorema 4.3): essi infatti hanno gli angoli $\widehat{AV"V}$ e $\widehat{V'BV}$ congruenti per quanto appena dimostrato, e $\widehat{BPF} = \widehat{VPV"}$ perché opposti al vertice. Ne consegue che $\widehat{V"VP} = \widehat{PFB}$. Ma $\widehat{V"VP}$ è un angolo interno di un pentagono regolare, e quindi vale 108 gradi (si veda il Lemma 3.3); e anche $\widehat{PFB} = 108°$. Ma per il Teorema dell'angolo esterno (Teorema 3.4), la somma degli angoli alla base di ABF deve essere congruente all'angolo esterno $\widehat{PFB} = 108°$. I due angoli $\widehat{ABV'}$ e $\widehat{V"AB}$ hanno quindi un'ampiezza pari a metà dell'angolo del pentagono, e cioè a 54 gradi. Generalizzando il problema al caso di due poligoni ciascuno dei quali possiede n lati, si concluderà che in ogni caso l'angolo $\widehat{PFB}$ è pari all'angolo interno del poligono regolare di n lati, e cioè $(n-2) \cdot 180°/n$ (Lemma 3.3); e ciascuno dei due angoli $\widehat{ABV'}$ e $\widehat{V"AB}$ sarà invece pari alla metà di quest'ultimo, e varrà cioè $(n-2) \cdot 90°/n$. □

Soluzione[30] al Problema 78

Per risolvere questo problema si dimostreranno due lemmi. Lemma 1: se due lati opposti del quadrilatero, ad esempio BC e DA, sono paralleli, allora i triangoli BCP e DAP sono congruenti. Dimostrazione: i triangoli BCP e DAP hanno gli angoli $\widehat{CPB}$ e $\widehat{APD}$ congruenti perché opposti al vertice, e gli angoli $\widehat{DAP}$ e $\widehat{BCP}$ congruenti perché alterni interni fra le rette parallele AD e BC (Teorema 3.5).

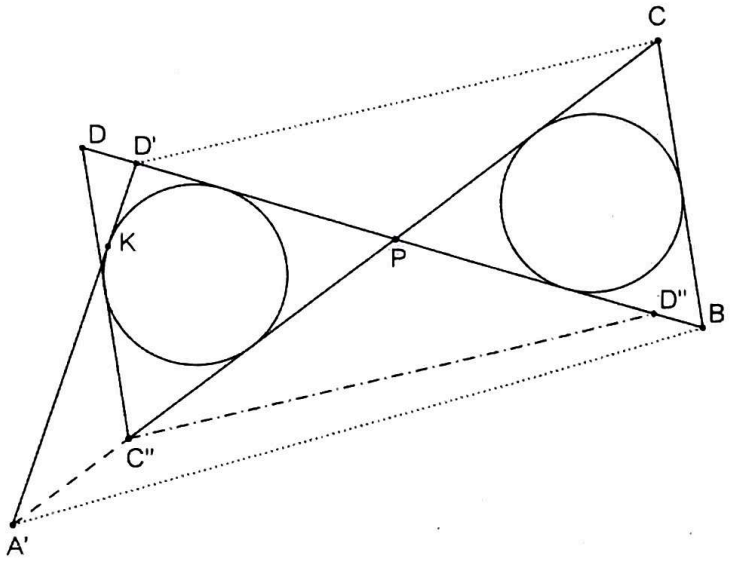


Pertanto i triangoli BCP e DAP sono simili per il Primo criterio di similitudine (Teorema 4.3). Se due triangoli simili hanno rapporto di similitudine k, allora anche i raggi delle circonferenze inscritte stanno nel medesimo rapporto (Teorema 4.6). Ma per ipotesi le circonferenze hanno lo stesso raggio, quindi dev'essere $k = 1$. Ne segue che i due triangoli sono congruenti. Lemma 2: due lati opposti del quadrilatero sono necessariamente paralleli. Dimostrazione: si prendano i due triangoli congruenti considerati nel Lemma 1, e si supponga per assurdo che un segmento fra AD e BC non sia lato del quadrilatero: ad esempio il lato opposto a BC sia $A'D'$ (tangente in K alla circonferenza inscritta, che ha lo stesso raggio di quella inscritta in BCP) e non AD, come indicato in figura.

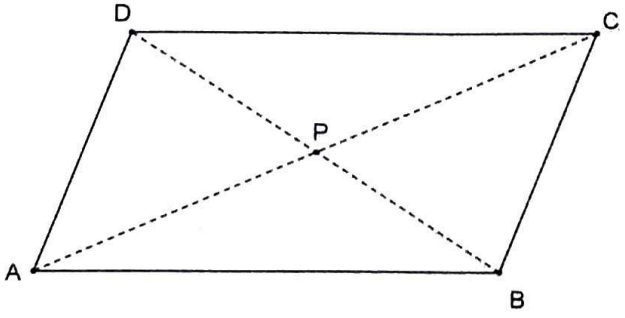


[30]Ringrazio Andrea Freschi per avere contribuito in maniera determinante alla stesura della soluzione di questo problema.

Dal momento che $AP = PC$ per la congruenza di BCP e DAP (Lemma 1), allora per costruzione $A'P > PC$; allo stesso modo $D'P < DP = PB$. I due triangoli PCD' e $A'BP$ hanno angoli $\widehat{D'PC}$ e $\widehat{BPA'}$ congruenti in quanto opposti al vertice. Ne consegue che, se si effettua una rotazione di 180 gradi del triangolo PCD' intorno al vertice P, il punto D' viene trasformato in un punto D" interno al segmento PB e il punto C in un punto C" interno al segmento PA' (in quest'ultimo caso il punto andrà a coincidere con A per il Lemma 1). Il triangolo $PC"D"$, congruente a PCD', è interamente contenuto in $A'BP$ (si veda la figura seguente).



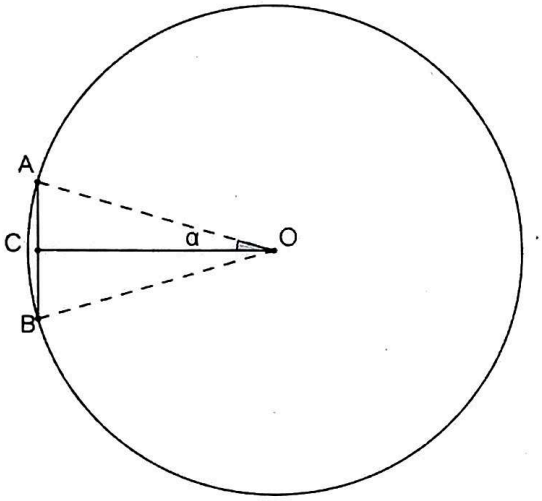
Ma ciò è assurdo, perché i due triangoli devono avere circonferenze inscritte di raggio uguale. Quindi i lati opposti AD e BC del quadrilatero devono essere paralleli (e, per il Lemma 1, congruenti).
Il quadrilatero $ABCD$ è dunque un parallelogramma, avendo lati opposti a due a due paralleli e a due a due congruenti (Teorema 8.1). Le sue diagonali si dividono a metà, e i quattro triangoli in cui è diviso il quadrilatero hanno tutti uguale area.



In base al Lemma 5.10 il raggio della circonferenza inscritta a un triangolo equivale ad $\mathcal{A}/p$. Si prendano allora due triangoli adiacenti, per esempio ABP e BCP; essendo congruenti i raggi delle circonferenze inscritte, nonché le aree, ABP e BCP devono avere il medesimo perimetro. Ma $AP = PC$ per le proprietà del parallelogramma, e BP è in comune: quindi necessariamente anche $AB = BC$. Il quadrilatero $ABCD$ ha due lati consecutivi congruenti, e pertanto, per il Teorema 8.1, è un rombo. □

Soluzione al Problema 79

È chiaro che il numero di lati massimo possibile deve essere pari, in modo che due lati opposti (e quindi paralleli) si avvicinino il più possibile ai confini del prato.



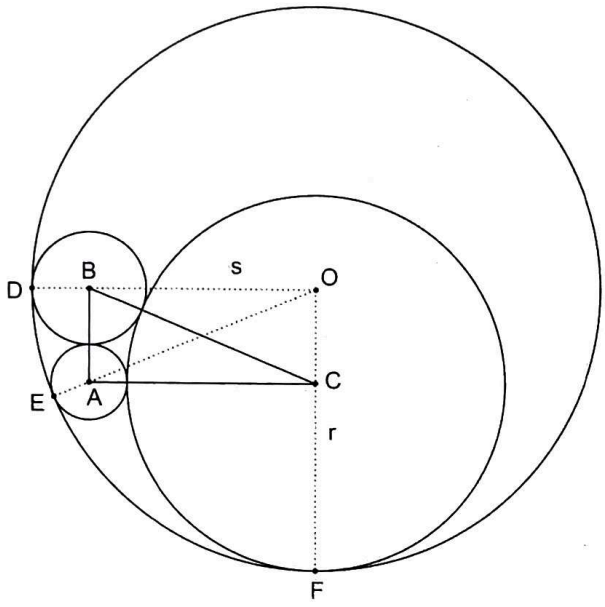
Se il poligono ha n lati congruenti, l'angolo $\widehat{BOA}$ vale $2\pi/n$; pertanto l'angolo indicato in figura con α è π/n. La distanza fra il lato AB e il suo lato opposto è pari a $2OC$; si calcoli allora $OC = AC/\tan\alpha = AC/\tan(\pi/n)$[31], da cui $2OC = 2AC/\tan(\pi/n)$. Si vuole che sia $2OC = 100 = 2AC/\tan(\pi/n)$, dove il lato del poligono è uguale a 1, e quindi $AC = 1/2$. Dunque $\tan(\pi/n) = 1/100$. Dando per ovvio che il numero di lati sia un numero grande, e, corrispondentemente, π/n sia un angolo piccolo, possiamo approssimare il valore della tangente con quello del suo argomento[32]; perciò $\pi/n = 1/100$, da cui $n = 100\pi$. Dovendo n essere un numero intero si prenderà la sua parte intera, cioè 314. L'angolo α è allora $\pi/314 \approx 0,01$ radianti, il che giustifica pienamente l'approssimazione effettuata. La risposta è 314. □

[31] Proprietà elementare dei triangoli rettangoli.

[32] L'approssimazione della tangente di un angolo con l'angolo stesso vale per angoli piccoli; è buona già per angoli di qualche decimo di radiante: $\tan(0,3) \approx 0,309$; $\tan(0,2) \approx 0,203$; $\tan(0,1) \approx 0,1003$.

Soluzione al Problema 80

Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che sia $r_1 < r_2 < r_3$. Il vertice dell'angolo retto è dunque A, centro della circonferenza più piccola.



Si costruisca ora la retta r per C parallela ad AB e la retta s per B parallela ad AC. Sia O il loro punto di intersezione. Il quadrilatero $ACOB$ è un parallelogramma, in quanto per costruzione ha i lati a due a due paralleli (Teorema 8.1); ma uno dei suoi angoli è retto ($\widehat{BAC}$), pertanto $ACOB$ è un rettangolo; i suoi lati valgono $r_1 + r_2$ ed $r_1 + r_3$. Detto D il punto di intersezione di s con C_2 e F il punto di intersezione di r con C_3, si ha che $OD = OF$: infatti $OD = DB + BO = r_2 + r_1 + r_3$, mentre $OF = OC + CF = r_1 + r_2 + r_3$. Si consideri il segmento OA: esso è una diagonale del rettangolo $ACOB$, e pertanto è congruente all'altra diagonale, BC, che equivale a $r_2 + r_3$; se si prolunga OA dalla parte di A di un segmento lungo r_1 si ottiene un punto E che appartiene alla circonferenza C_1 (perché $AE = r_1$), e che ha da O una distanza pari a $OA + OE = r_1 + r_2 + r_3$. In conclusione, i punti D, E e F sono equidistanti da O, quindi esiste una circonferenza di centro O e raggio $r_1 + r_2 + r_3$ passante per D, E e F, che sono punti appartenenti rispettivamente a C_2, C_1 e C_3; è facile constatare che le circonferenze C_2, C_1 e C_3 sono anche tangenti alla circonferenza di centro O, dato che i raggi OD, OE e OF passano per B, A e C, e quindi le tangenti alle circonferenze C_2, C_1 e C_3 nei punti D, E e F sono comuni alle tangenti alla circonferenza di centro O (Lemma 3.10). □

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Liceo Copernico di Udine perché mi ha dato la possibilità di avvicinarmi alle gare di matematica, e mi permette di continuare a occuparmene. In particolare sono grato a tutti gli allievi del liceo che hanno voluto seguirmi nella meravigliosa avventura delle competizioni matematiche.
Ringrazio gli amici della Mathesis di Udine per il loro sostegno morale e materiale durante la scrittura di questo libro. Sandro Campigotto e Salvatore Damantino sono stati preziosissimi nel presentarmi problemi e soluzioni che ho inserito nella raccolta. Esprimo inoltre la più profonda gratitudine a Salvatore per la sua revisione del testo, che è stata essenziale per limitare i miei errori e le mie distrazioni. Per tutti gli errori che sono sicuramente rimasti, la responsabilità comunque è esclusivamente mia. Sono inoltre grato a Salvatore e a Paolo Dall'Aglio per il loro impegno dedicato a rendere dignitoso l'aspetto di questo libro.
Ringrazio tutti gli amici della Commissione Olimpiadi della matematica, e i loro collaboratori, con cui ho avuto l'onore di lavorare in diverse occasioni; e tra questi Samuele Mongodi e Ludovico Pernazza. Le mie partecipazioni al senior sono state esperienze davvero impagabili.
Da ultimo, il ringraziamento più importante va a Luca Lamanna, in passato mio allievo e adesso mio amico, perché ha condiviso con me il lavoro di tanti anni; senza di lui la mia vita di allenatore (e di insegnante) sarebbe stata molto diversa, e molto più povera di soddisfazioni.

Bibliografia

[1] Alexanderson G. L., Klosinski L. F., Larson L. C., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solution 1965-1984*, MAA, Washington 1985.

[2] Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L., *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser, Boston 2006.

[3] Antoniali F. M., Càssola C., Donatis P., Rossit E., *I Compitoni del Liceo Copernico*, Provincia di Udine, Udine 2014.

[4] Barsanti M., Conti F., De Lellis C., Franzoni T., *Le Olimpiadi della matematica (seconda edizione)*, Zanichelli, Bologna 2002.

[5] Branzei D., Serdean I., Serdean V., *Junior Balkan Mathematical Olympiads*, Plus Publishing House, Bucarest 2003.

[6] Campigotto S., *Progetto Phiquadro, Testi e soluzioni delle gare a squadre dal 2008 al 2010*, vol. 1, Provincia di Udine, Udine 2011.

[7] Campigotto S., *Progetto Phiquadro, Testi e soluzioni delle gare a squadre dal 2010 al 2012*, vol. 2, Provincia di Udine, Udine 2013.

[8] Càssola C., Antoniali F. M., Lamanna L., *Tre anni di Quaestio Copernicana (2008-2011)*, Provincia di Udine, Udine 2012.

[9] Conti F., Barsanti M., Franzoni T., *Le Olimpiadi della matematica. Problemi dalle gare italiane*, Zanichelli, Bologna 1995.

[10] Coxeter H. S. M., Greitzer S. L., *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington 1967.

[11] Coxeter H. S. M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, New York 1969.

[12] D'Ignazio I., Suppa E., *Il Problema Geometrico dal compasso al Cabri*, Interlinea, Teramo 2001.

[13] Dijksterhuis E. J., Knorr W. R., *Archimede*, Ponte alle Grazie, Firenze 1989.

[14] Douglas Faires J., Wells D., *The Contest Problem Book VIII*, MAA, Washington 2008.

[15] Engel A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York 1998.

[16] Euclide, *Tutte le Opere* (a cura di Fabio Acerbi), Bompiani, Milano 2007.

[17] Gilbert G. T., Krusemeyer M. I., Larson L. C., *The Wohascum County Problem Book*, MAA, 1983.

[18] Gobbino M., *Schede Olimpiche*, Unione Matematica Italiana, Bologna 2012.

[19] Heath T., *A History of Greek Mathematics*, 2 voll., Dover, New York 1981.

[20] Honsberger R., *From Erdös to Kiev. Problems of Olympiad Caliber*, MAA, Washington 1996.

[21] Honsberger R., *Mathematical Chestnuts from around the World*, MAA, Washington 2001.

[22] Kedlaya K. S., Poonen B., Vakil R., *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000. Problems, Solutions, and Commentary*, MAA, Washington 2002.

[23] Klamkin, M. S., *International Mathematical Olympiad 1979-1985*, MAA, Washington 1986.

[24] Kuczma M. E., Windischbacher E., *Polish and Austrian Mathematical Olympiads 1981-1995*, Australian Mathematics Trust, Canberra 1998.

[25] Larson L., *Problem Solving through problems*, Springer-Verlag, New York 1983.

[26] Liu A., *Hungarian Problem Book III*, MAA, Washington 2001.

[27] Nicosia R., Cordova A., *Geometria (per l'Istituto Magistrale)*, SEI, Torino 1989.

[28] Paolini G., *La Matematica delle Olimpiadi*, La Scuola, Milano 2012.

[29] Posamentier A. S., Salkind C. T., *Challenging Problems in Geometry*, Dover, New York 1996.

[30] Rabinowitz S., *Index to Mathematical Problems 1980-1984*, MathPro Press, Westford 1991.

[31] Reiman I., *International Mathematical Olympiad 1959-1999*, Anthem Press, Londra 2001.

[32] Ruderman H. D., *NYSML-ARML Contests*, Mu Alpha Theta, Norman 2007.

[33] Ruelle D., *La Mente Matematica*, Dedalo, Bari 2009.

[34] Salkind C. T., Earl J. M., *The Contest Problem Book III*, MAA, Washington 1973.

[35] Taylor P. J., *Tournament of the Towns 1980-1984*, Australian Mathematics Trust, Marrickville 1993.

[36] Temple Bell E., *Men of Mathematics*, Penguin Books, Londra 1953.

Indice

Introduzione	9
1 Problemi introduttivi	11
2 Teorema di Pitagora	15
3 Angoli e loro proprietà	19
4 Similitudine	27
5 Punti notevoli di un triangolo	33
6 Formula di Erone	41
7 Conteggio di diagonali	45
8 Quadrilateri e altri poligoni	47
9 Quadrilateri ciclici e Teorema di Tolomeo	55
10 Teoremi sulle corde, le tangenti e le secanti	63
11 Geometria analitica	71

12 Trigonometria 79

13 Geometria e disuguaglianze 89

14 Problemi 95

15 Soluzioni 111

Ringraziamenti 191

Bibliografia 193

Primo di un gruppo di testi dedicati alla geometria in preparazione alle gare di matematica, il libro si propone di fornire una raccolta di teoremi, tecniche ed esercizi per aiutare lo studente che desideri approfondire la preparazione in geometria, nella speranza di insegnargli anche ad apprezzarne la profonda eleganza. Non è un manuale scolastico: pertanto non contiene, tranne alcune eccezioni, le dimostrazioni dei teoremi che sono di volta in volta enunciati e utilizzati. Il testo è incentrato su problemi delle gare di matematica, ed è dedicato, oltre che a tutti gli studenti che vogliano cimentarsi nelle competizioni, a tutti coloro che siano disposti a mettersi alla prova con esercizi e dimostrazioni. L'autore si augura che possa essere utile anche a chi si prepara per le prove di ammissione alle scuole superiori universitarie.

Carlo Càssola, laureato in fisica, insegna dal 1995 e dal 2004 è docente al Liceo Scientifico "Copernico" di Udine, dove ha iniziato a interessarsi alle gare di matematica. Socio attivo della sezione di Udine della Mathesis, collabora nell'organizzazione delle fasi locali delle Olimpiadi della Matematica, individuali e a squadre. Fa parte del gruppo nazionale che annualmente prepara i testi per i Giochi di Archimede, ed è responsabile dei Campionati Internazionali di Giochi Matematici per la sede di Udine. Ha partecipato per tre volte allo stage senior di Pisa, organizzato dall'Unione Matematica Italiana, in qualità di formatore degli studenti. Tiene regolarmente lezioni agli stage di Udine dedicati alle gare di matematica per le scuole secondarie. Oltre alla matematica, è appassionato di musica e di montagna.

ISBN 978-88-969-7369-1

9 788896 973691

Euro 17,50